

Anfangsrandwertaufgaben: schwingende Saite und statische Rechtecksmembran

1. *Schwingende am Rand eingespannte Saite*: Bestimmen Sie aus Fouriers Lösungsformel die Funktion $A \in C^2(\mathbb{R} \times (0, L) : \mathbb{R})$, für die (i), (ii) und (iii) gilt.

(i) d'Alemberts WG: $\square A = 0$

(ii) homogene Dirichlet'schen Randbedingung: $\lim_{x \downarrow 0} A(t, x) = \lim_{x \uparrow L} A(t, x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

(iii) Anfangsvorgabe: $A(0, x) = aL \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$, $\partial_t A(0, x) = 2\pi bc \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$ für alle $x \in (0, L)$; mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$

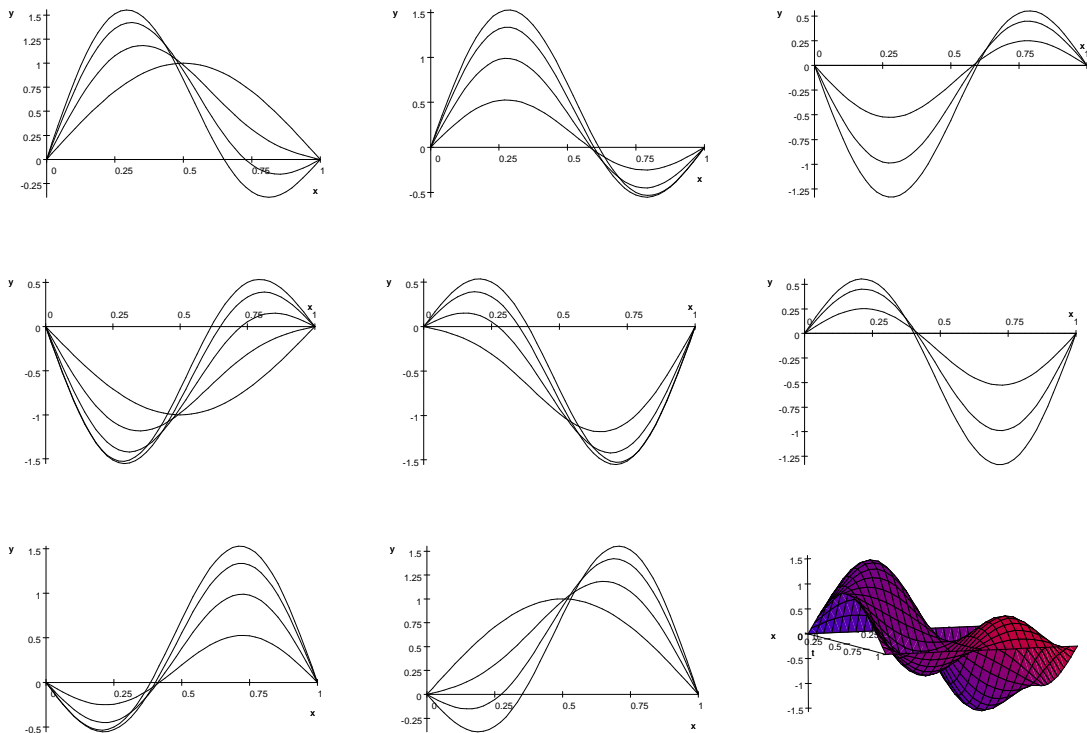
Beachten Sie, dass $\lim_{x \downarrow 0} v(x) = \lim_{x \uparrow L} v(x) = 0$ und $\lim_{x \downarrow 0} u''(x) = \lim_{x \uparrow L} u''(x) = 0$. Warum ist das von Bedeutung?

Lösung:

$$A(t, x) = L \left\{ a \cos\left(\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + b \sin\left(2\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \right\}.$$

Ist für festes x die Abbildung $t \mapsto A(t, x)$ periodisch? Falls ja, hängt die kleinste Periode von x ab?

Hier sind der 3d-Graph und einige Momentaufnahmen der Schwingung A/L für $ct/L = n/16$ für $n = 0, 1, 2, \dots, 32$ und für $a = b = 1$. Suchen Sie die Web-Seite <http://www.falstad.com/loadedstring/> auf. Dort können Sie die Lösung *anhören!*



2. Zeigen Sie: Wird in Bsp 1 die Anfangsvorgabe (iii) durch $A(0, x) = \sin^3\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in (0, L)$ ersetzt, dann folgt aus Fouriers Lösungsformel

$$4 \cdot A(t, x) = 3 \cos\left(\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) - \cos\left(3\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right).$$

Lässt sich die Saitenschwingung zur Anfangsvorgabe $A(0, x) = \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in (0, L)$ auch so einfach lösen? Wo liegt das Hindernis?

3. *Harmonische Funktion am Rechteck mit Dirichletscher Randvorgabe*¹: Sei $u : \overline{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $u|_R \in C^2(R; \mathbb{R})$ mit $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\}$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u(x, L_2) = \sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right)$, $u(x, 0) = u(0, y) = u(L_1, y) = 0$.

Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \overline{R}$ gilt

$$u(x, y) = \frac{\sin(\pi x/L_1) \sinh(\pi y/L_1)}{\sinh(\pi L_2/L_1)}.$$

Können Sie u zu einer harmonischen Funktion auf \mathbb{R}^2 fortsetzen? Hat u in R ein Minimum?

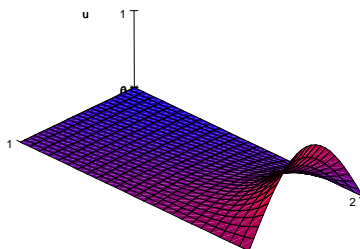


Figure 1: u von Bsp 3 für $L_1 = 1$ und $L_2 = 2$

4. *Vollständige Separation von $\square A = 0$ in Polarkoordinaten*: Für $A \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \setminus 0$ gelte für alle (t, x) mit x im Definitionsbereich der Polarkoordinaten (r, φ)

$$A(t, x) = f(t) h(r(x)) B(\varphi(x)).$$

Zeigen Sie, dass aus $\square A = 0$ folgt, dass Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren, für die

$$\begin{aligned} f'' + c^2 \lambda f &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}, \\ B'' + m^2 B &= 0 \text{ auf } (0, 2\pi), \\ h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) + \left(\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right) h(r) &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

¹Die Funktion u beschreibt einerseits das elektrische Potential in einem (unendlich langen) Hohlraum mit konstantem rechteckigen Querschnitt und entsprechend vorgegebenem Potential auf der (inneren) Oberfläche des Rechteckzylinders. Andererseits gibt u die Form einer elastischen Membran an, die an den vorgegebenen Rand geheftet ist. Sie hat den kleinsten Flächeninhalt unter allen d'baren Flächen vorgegebenen Randes.