Name:..Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter..........................Studienrichtung:...

Zweite Klausur (20 Punkte)

1. (8 Punkte) Seien $k \in \mathbb{R}_{>0}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{C})$ und $\psi : \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ mit

$$\psi(t,x) = \begin{cases} f(t)\,\frac{\sin(k|x|)}{k|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ f(t) & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Dabei ist $|\cdot|$ die Standardnorm von $\mathbb{R}^3$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $i\partial_t \psi(t,x) = -\Delta_x \psi(t,\cdot)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$ genau dann gilt, wenn die Funktion f die gewöhnliche Differentialgleichung $if' = k^2 f$ erfüllt? Hinweis: Benützen Sie die in Bsp1 von Blatt 11 bewiesene Formel $\Delta[h(r)/r] = h''(r)/r$ ohne sie nochmals zu beweisen.

(b) (2 Punkte) Geben Sie die Menge aller maximalen Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der DG $if' = k^2 f$ an.

(c) (2 Punkte) Ist ψ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) (2 Punkte) Geben Sie die Zerlegung von ψ in eine von $x = 0$ weg- und eine auf $x = 0$ zulaufende Kugelwelle an.

2. (6 Punkte) Sei $\kappa^2 \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Menge L aller um 0 drehinvarianten Funktionen

$$u \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}\right) \text{ mit } \Delta u = \kappa^2 u.$$

Hinweis: setzen Sie an $u = f(r)/r$ mit $r = |\cdot|$ (Standardnorm von $\mathbb{R}^3$) und benützen Sie die in Bsp1 von Blatt 11 bewiesene Formel $\Delta u = f''(r)/r$ ohne sie nochmals zu beweisen.

(b) (2 Punkte) Welche $u \in L$ besitzen eine stetige Fortsetzung nach $\mathbb{R}^3$?

(c) (1 Punkt) Welche $u \in L$ sind beschränkt?

3. (2 Punkte) Sei $\kappa^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k \in \mathbb{R}^n$. Das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für welche $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ löst $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $A(t,x) = \sin(\omega t - \langle k, x \rangle)$ die Wellengleichung $\left(\Box + \kappa^2\right) A = 0$?

4. (4 Punkte) Seien $A_0 \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Beantworten Sie je nach Studienrichtung a) oder b). Hinweis: d'Alemberts Lösungsformel besagt für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dass

$$A(t,x) = \frac{u(x-ct) + u(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi)\, d\xi.$$

(a) Meteo: (4 Punkte) Welche Lösung $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von d'Alemberts Wellengleichung erfüllt die Anfangsvorgabe $A(0,x) = A_0 \sin(kx)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$? Ist A eine Stehwelle? Hinweis: für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$.

(b) Physik: (4 Punkte) Welche Lösung $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von d'Alemberts Wellengleichung erfüllt die Anfangsvorgabe $A(0,x) = 0$ und $\partial_t A(0,x) = \frac{A_0 ac}{a^2 + x^2}$? Hinweis: $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.

Lösung:

1. (a) Es gilt $\Delta \sin(kr)/r = \left[\partial_r^2 \sin(kr)\right]/r = -k^2 \sin(kr)/r$. Somit gilt $i\partial_t \psi(t,x) = -\Delta_x \psi(t,\cdot)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$ genau dann, wenn für alle diese Punkte

$$if'(t)\frac{\sin(kr)}{kr} = k^2 f(t)\frac{\sin(kr)}{kr}$$

erfüllt ist. Dies wiederum ist äquivalent zu

$$if'(t) = k^2 f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Die gesuchte Menge ist $\{f_A : A \in \mathbb{C}\}$ mit $f_A(t) = A \cdot \exp\left(-ik^2 t\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) ψ ist auf $\mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus 0\right)$ stetig. Im Punkt $(t,0)$ ist ψ auch stetig, da nach de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(k|x|)}{k|x|} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(k\varepsilon)}{k\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{k\cos(k\varepsilon)}{k} = 1.$$

(d) Mit $\sin(kr) = \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)/2i$ folgt

$$\psi(t,\cdot) = \frac{A}{2ikr}e^{-ik^2 t}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) = \frac{A}{2ikr}\left(e^{-i\left(k^2 t - kr\right)} - e^{-i\left(k^2 t + kr\right)}\right).$$

Die Funktion $\frac{A}{2ikr}e^{-i\left(k^2 t - kr\right)}$ ist eine auslaufende und $\frac{A}{2ikr}e^{-i\left(k^2 t + kr\right)}$ ist eine einlaufende Kugelwelle.

2. (a) Eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $u : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ ist genau dann drehinvariant um 0, wenn eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ existiert, sodass $u = \frac{f\circ r}{r}$ mit $r = |\cdot|$ der Standardnorm auf $\mathbb{R}^3$ gilt. Damit gilt[1] $\Delta u = (f'' \circ r)/r$.
Für u gilt somit $\Delta u = \kappa^2 u$ genau dann, wenn f eine maximale Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}_{>0}$

$$f''(x) = \kappa^2 f(x)$$

ist. Es existieren also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = f_{\alpha,\beta}(x)$ für alle $x > 0$ mit $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha e^{\kappa x} + \beta e^{-\kappa x}$. Somit gilt $L = \{u_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ mit

$$u_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R} \text{ und } u_{\alpha,\beta}(p) = \alpha\frac{e^{\kappa|p|}}{|p|} + \beta\frac{e^{-\kappa|p|}}{|p|}.$$

[1] Hier nochmals der Beweis für $\Delta u = (f'' \circ r)/r$: es gilt

$$grad(u) = \frac{f'(r)\, grad(r)}{r} - f(r)\frac{grad(r)}{r^2} = \left(\frac{f'(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^3}\right)\iota d.$$

Daraus folgt

$$\Delta u = divgrad(u) = \left\langle grad\left(\frac{f'(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^3}\right), \iota d\right\rangle + \left(\frac{f'(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^3}\right) div(\iota d).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} grad\left(\frac{f'(r)}{r^2}\right) &= \frac{r^2 f''(r) - 2rf'(r)}{r^4}\frac{\iota d}{r} \\ grad\left(\frac{f(r)}{r^3}\right) &= \frac{r^3 f'(r) - 3r^2 f(r)}{r^6}\frac{\iota d}{r} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left\langle grad\left(\frac{f'(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^3}\right), \iota d\right\rangle &= \frac{r^2 f''(r) - 2rf'(r)}{r^3} - \frac{r^3 f'(r) - 3r^2 f(r)}{r^5} \\ &= \frac{r^2 f''(r) - 2rf'(r) - rf'(r) + 3f(r)}{r^3} \\ &= \frac{r^2 f''(r) - 3rf'(r) + 3f(r)}{r^3}. \end{aligned}$$

Mit $div(\iota d) = 3$ folgt daraus

$$\Delta u = \frac{r^2 f''(r) - 3rf'(r) + 3f(r) + 3rf'(r) - 3f(r)}{r^3} = \frac{f''(r)}{r}.$$

(b) Eine stetige Fortsetzung nach $\mathbb{R}^3$ hat $u_{\alpha,\beta}$ genau dann, wenn $\alpha+\beta=0$. (Potenzreihe um 0 betrachten!) Es gilt

$$u_{\alpha,-\alpha}(p)=\begin{cases} 2\alpha\frac{\sinh\kappa|p|}{|p|} & \text{für } p\neq 0 \\ 2\alpha\kappa & \text{für } p=0 \end{cases}.$$

Alle anderen Lösungen in L sind in jeder Kugel um 0 unbeschränkt.

(c) Auf ganz $\mathbb{R}^3\setminus 0$ beschränkt ist von den um 0 beschränkten Lösungen nur die triviale Lösung $u_{0,0}=0$, da $\frac{\sinh\kappa|p|}{|p|}$ für $|p|\to\infty$ unbeschränkt wächst.

3. Es gilt

$$\Box A(t,x)=-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\langle k,k\rangle\right)\sin\left(\omega t-\langle k,x\rangle\right).$$

Somit gilt $\left(\Box+\kappa^2\right)A=0$ genau dann, wenn

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2}+\langle k,k\rangle+\kappa^2\right)=0.$$

Dies ist wegen der Voraussetzung $\omega>0$ äquivalent zu $\omega=c\sqrt{|k|^2+\kappa^2}$. Man beachte, dass $\omega>c\,|k|$.

4. (a) Nach d'Alemberts Lösungsformel gilt $A(t,x)=\frac{A_0}{2}\left[\sin\left(k\left(x-ct\right)\right)+\sin\left(k\left(x+ct\right)\right)\right]$. Wegen $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin(\alpha)\cos(\beta)$ gilt $A(t,x)=A_0\sin(kx)\cos(ckt)$. Somit ist A eine Stehwelle.

(b) Aus d'Alemberts Lösungsformel folgt mit der Substitution $t=s/a$

$$\begin{aligned} A(t,x) &= \frac{A_0ac}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\frac{ds}{a^2+s^2}=\frac{A_0}{2}\int_{\frac{x-ct}{a}}^{\frac{x+ct}{a}}\frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{A_0}{2}\left[\arctan\left(\frac{x+ct}{a}\right)-\arctan\left(\frac{x-ct}{a}\right)\right]. \end{aligned}$$

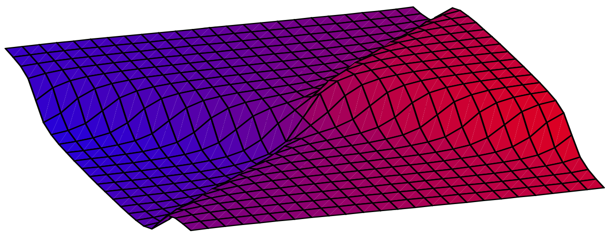

Figure 1: Graph der Lösung von Bsp 4b