

$\square A = j$  : Galileischer Dopplereffekt; Minkowskis 'Metrik'; lorentzinvariante  $A \in \ker \square$

1. Sei  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto A_0 \cdot \sin(k(ct - x))$  mit Konstanten  $A_0, c \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es gilt also  $\square A = 0$  und  $A$  ist rechtsläufig. An einem festen Ort  $x \in \mathbb{R}$  schwingt  $t \mapsto A(t, x)$  mit der (Kreis)frequenz  $\omega = ck$  harmonisch. Für einen mit konstanter Geschwindigkeit  $v \in \mathbb{R}$  bewegten Ort  $\xi(t) = vt + a$  schwingt die Abbildung  $t \mapsto A(t, \xi(t))$  ebenfalls harmonisch, jedoch mit einer Frequenz  $\tilde{\omega}(v)$ . Zeigen Sie, dass  $\tilde{\omega}(v) = \omega \cdot \left|1 - \frac{v}{c}\right|$ .<sup>1</sup> Beachte:  $\tilde{\omega}(2c) = \omega$ . Figur 1 zeigt  $v/c \mapsto \tilde{\omega}(v)/\omega$  in schwarz. Die Relativitätstheorie beschränkt  $v/c$  auf das Intervall  $(-1, 1)$  und modifiziert die Formel für  $\tilde{\omega}(v)/\omega$  zu  $\hat{\omega}(v)/\omega = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$ . In der Nähe von  $v/c = 0$  sind die beiden Theorien experimentell schwer zu unterscheiden. Figur 1 zeigt  $v/c \mapsto \hat{\omega}(v)/\omega$  in rot. Bis zu welcher Ordnung stimmen die Potenzreihen von  $\tilde{\omega}$  und  $\hat{\omega}$  um 0 überein?

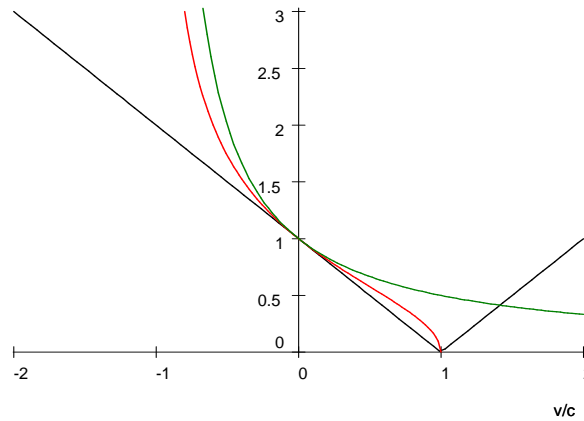


Figure 1:  $\frac{\tilde{\omega}}{\omega}$  (schwarz),  $\frac{\hat{\omega}}{\omega}$  (rot) und  $\frac{\omega_{-}(c,0)}{\omega}$  (grün) als Funktion von  $v/c$

2. Welche Lösung erzeugt eine mit der Frequenz  $\omega$  schwingende und konstanter Geschwindigkeit  $u \in (-c, c)$  bewegte 'kleine' Quelle? Ein einfaches Modell einer Punktquelle besteht darin, am Ort der Quelle den Wert der Auslenkung  $A(t, \cdot)$  zu jeder Zeit  $t$  vorzugeben und diese Vorgabe durch jene von der Quelle wegläufigen Lösungen von d'Alemberts Wellengleichung vor und hinter der Quelle zu ergänzen, die sich stetig an die Vorgabe am Ort der Quelle anfügen.

Genauer: Sei  $\Omega_{\pm} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x \gtrless ut\}$ . Suche eine Funktion  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega_+ \cup \Omega_- : \mathbb{R})$  mit (i)  $A(t, ut) = A_0 \cdot \sin(\omega t)$  für ein  $A_0 \in \mathbb{R}$ , (ii)  $\square A(t, x) = 0$  für alle  $(t, x) \in \Omega_{\pm}$ , (iii) auf  $\Omega_+$  ist  $A$  rechtsläufig und auf  $\Omega_-$  ist  $A$  linksläufig.<sup>2</sup>

Zeigen Sie, dass genau eine solche Funktion  $A$  existiert und dass für diese gilt:

$$A(t, x) = \begin{cases} A_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{1-\frac{u}{c}}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) & \text{für } x \geq ut \\ A_0 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{1+\frac{u}{c}}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) & \text{für } x \leq ut \end{cases}$$

Zusammenfassung: Rechts von der bewegten Quelle läuft eine Welle der Frequenz  $\omega / (1 - \frac{u}{c})$  nach rechts. Links von der Quelle läuft eine Welle der Frequenz  $\omega / (1 + \frac{u}{c})$  nach links.<sup>3</sup> Rechts bzw links

<sup>1</sup>Diese Tatsache, dass ein durch das schwingende Medium mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegter Punktsensor eine  $v$ -abhängige Frequenz abtastet, heißt passiver Galileischer Dopplereffekt.

<sup>2</sup>Die Anregung einer Welle wird hier also nicht durch Vorgabe einer Inhomogenität der WG, sondern durch Vorgabe eines Randwertes für die Gebiete  $\Omega_{\pm}$  am Bild der 'Weltlinie'  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (t, ut)$  bewirkt. Es gilt ja  $\gamma(\mathbb{R}) = \partial\Omega_{\pm}$ . Zusätzlich wird die Laufrichtung der Wellen auf  $\Omega_{\pm}$  vorgeschrieben. Diese letzte Vorgabe entspricht Sommerfelds Ausstrahlungsbedingung für Antennenprobleme der Elektrodynamik oder auch für quantenmechanische Streuprobleme.

<sup>3</sup>Dieser Sachverhalt heißt aktiver Galileischer Dopplereffekt.

von der Quelle, also auf  $\Omega_+$  bzw  $\Omega_-$  'sieht' ein mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegter Sensor die Frequenzen

$$\omega_+(u, v) = \omega \frac{|1 - \frac{v}{c}|}{1 - \frac{u}{c}} \text{ bzw } \omega_-(u, v) = \omega \frac{|1 + \frac{v}{c}|}{1 + \frac{u}{c}}.$$

Figur 1 zeigt  $u/c \mapsto \omega_-(u, 0)/\omega$  in grün auch für  $u > c$ . Dieser Fall wird in Bsp 4 behandelt.

In welchen Punkten  $(u, v) \in (-c, c) \times \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $\omega_+$  bzw  $\omega_-$  konstant auf einem Geradenstück  $\{(u, v) + \lambda(1, 1) : -\varepsilon < \lambda < \varepsilon\}$  für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ . Diese Bedingung formuliert die lokale Galileiinvarianz von  $\omega_+$  bzw  $\omega_-$  in einem Punkt  $(u, v)$ . Figur 1 zeigt  $\omega_-(u, 0)/\omega$  in grün.

3. Ein Sensor bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v \in (-c, c)$  durch die Welle von Bsp 1. Er werde dabei selbst zu einer Punktquelle im Sinn von Bsp 2 mit der Frequenz  $\tilde{\omega}(v)$ . Welchen welcher Frequenzen strahlt der Sensor nach links bzw rechts ab? (galileisches Geschwindigkeitsradar)
4. Übertragen Sie Beispiel 2) auf den Fall  $|u| > c$ . Funktioniert das Quellenmodell von Randvorgaben auf  $\partial\Omega_{\pm}$  und diktiert der Laufrichtung auf  $\Omega_{\pm}$  auch für den Fall  $|u| = c$ ?
5. (Freiwillig) Sei  $V$  ein reeller Vektorraum der Dimension  $n + 1 \geq 2$ . Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  sei bilinear und symmetrisch und es gebe Basen  $\underline{e} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  von  $V$  mit

$$\langle e_{\mu}, e_{\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu} := \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = \nu \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Eine solche Abbildung wird als Minkowskisches inneres Produkt oder auch Minkowskimetrik bezeichnet. Sie ist *kein* Skalarprodukt von  $V$ , da ja Vektoren  $v \in V$  mit  $\langle v, v \rangle < 0$  existieren. Eine Basis  $\underline{e}$  von  $V$  mit  $\langle e_{\mu}, e_{\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu}$  heißt Normalbasis. Sei  $\Omega \subset V$  offen und  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion. Sei  $grad(A)$  jenes Vektorfeld, das für alle  $X \in V$  und für alle  $p \in \Omega$

$$\langle grad_p(A), X \rangle = d_p A(X)$$

erfüllt. Die zu einer Normalbasis  $\underline{e}$  gehörige Karte  $\Phi_{\underline{e}} = (x^0, x^1, \dots, x^n) = (ct, x^1, \dots, x^n)$  von  $V$  erfüllt  $v = \sum_{\mu=0}^n x^{\mu}(v) \cdot e_{\mu}$  für alle  $v \in V$ . Zeigen Sie

- (a)  $\langle v, v \rangle = (ct)^2(v) - \sum_{i=1}^n (x^i)^2(v) \equiv (ct)^2(v) - |x|^2(v)$
- (b)  $grad(A) = \left( \partial_0^{\Phi_{\underline{e}}} A \right) \cdot e_0 - \sum_{i=1}^n \left( \partial_i^{\Phi_{\underline{e}}} A \right) \cdot e_i = \left( \frac{1}{c} \partial_t A \right) \cdot e_0 - \sum_{i=1}^n (\partial_i A) \cdot e_i$
- (c)  $div(grad(A)) = \left( \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \right) A = \square A$ .

6. (Freiwillig) Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  wie in Bsp 5. Der offene Doppelkegel  $K_0 \subset V$  sei  $K_0 = \{v \in V : \langle v, v \rangle > 0\}$ . Sei  $L$  die Menge aller Funktionen  $A \in C^2(K_0 : \mathbb{R})$  mit

(i) zu  $A$  existiert ein  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $A(v) = f(\langle v, v \rangle)$  und (ii)  $\square A = 0$ .

Zeigen Sie:  $L = \{A_{\alpha, \beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  mit

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{cases} \alpha \ln(c^2 t^2 - |x|^2) + \beta & \text{für } n = 1 \\ \frac{\alpha}{(c^2 t^2 - |x|^2)^{\frac{n-1}{2}}} + \beta & \text{für } n > 1 \end{cases} .$$

Welche der Funktionen  $A_{\alpha, \beta}$  besitzen eine stetige Fortsetzung auf  $\overline{K_0}$ ?

NB:  $L$  ist die Menge aller lorentzinvarianten Lösungen von  $\square A = 0$  im Inneren des Lichtkegels.  $L$  ist ein reeller 2d Vektorraum.