

$\square A = j$: Abstrahlung einer Punktquelle; symmetrische Lösungsansätze bei statischer Quelle

- Zur Auffrischung: Sei $f \in C^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$, mit $x \mapsto f(|x|)/|x|$.
 Zeigen Sie: $(\Delta\phi)(x) = f''(|x|)/|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$.
- Sei $\psi \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $A : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A(t, x) = \psi(t, |x|)/|x|$. Zeigen Sie, dass $\square A = 0$ genau dann auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus 0)$, wenn $(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_r^2)\psi = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Zu einer Lösung A existieren also zwei Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, sodass $A = A_{f,g}$ mit

$$A_{f,g}(t, x) := \frac{1}{|x|} [f(|x| - ct) + g(|x| + ct)]$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus 0)$. Zeigen Sie:

- Die Lösungen $A_{f,0}$ (resp. $A_{0,g}$) laufen von der Singularität in $x = 0$ weg (resp. auf die Singularität zu).
- I.A. hat $A_{f,g}$ keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$ und ergibt daher *keine* Lösung von $\square A = 0$ auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.
- $A_{f,g}$ hat genau dann eine stetige Fortsetzung nach $x = 0$, wenn $f(x) = -g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Figur 1 zeigt $x \mapsto A_{f,0}(t, x, 0, 0)$ mit $f(x) = 1/(1+x^2)$ für $t \in \{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$ im Bereich $1 < x < 15$. Ein physikalisches Bild: Am Ort 0 sitzt eine zeitabhängige, drehinvariante Punktquelle, die im Fall von $A_{f,0}$ im anfänglich ruhende Medium eine Welle anregt. Im Fall von $A_{0,g}$ wird das anfänglich schwingende Medium von der Quelle ruhiggestellt bzw. die einlaufende Welle wird ausgelöscht. Im allgemeinen Fall von $A_{f,g}$ läuft g auf die Quelle zu, wird von dieser gelöscht und durch das auslaufende f ersetzt. Eine formelmäßige Präzisierung der Quelle j ist erst mit den Mitteln der Distributionentheorie möglich.

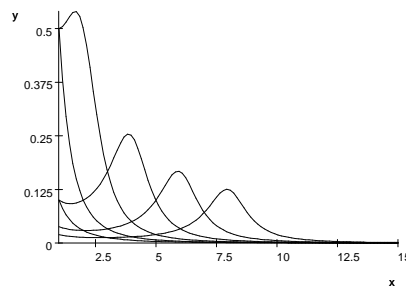


Figure 1: Momentaufnahmen einer auslaufenden Kugelwelle

- Zeigen Sie: Hat f die Periode L , dann hat die Abbildung $t \mapsto A_{f,0}(t, x)$ von Beispiel 2) die Periode $T = L/c$. Bestimmen Sie für $A_{f,0}$ mit $f(x) = \sin(kx)$ und $k \in \mathbb{R}_{>0}$ die gesamte Energie, die während einer (zeitlichen) Periode durch eine Kugeloberfläche mit Radius R und Mittelpunkt 0 abströmt. Wie groß ist das Periodenmittel der Strahlungsleistung? Hängt es von R ab? Hinweis: Das Energiestromvektorfeld $T_A(t, \cdot)$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ erfüllt

$$T_A(t, \cdot) = -\partial_t A(t, \cdot) \cdot \text{grad}(A(t, \cdot)).$$

Es folgt mit $\partial K_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = R\}$ und $\omega = ck = 2\pi/T$

$$\overline{E}_R := \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{\partial K_R} \left\langle T_A(t, x), \frac{x}{|x|} \right\rangle df = \frac{2\pi}{c} \omega^2.$$

4. Statisch belastete Trommelmembran¹: Sei $j(t, x) = -1$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ mit $|x| \leq R$ für ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Diese Quelle ist also dreh- und zeittranslationsinvariant². Daher versuchen wir einen Lösungsansatz für $\square A = j$ mit ebenderselben Symmetrie: Es gebe eine stetige Funktion $g : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $A(t, x) = g(|x|)$ für alle $(t, x) \in D = \mathbb{R} \times \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$. Achtung: Dieser Ansatz liefert bei weitem nicht alle Lösungen von $\square A = -1$ auf D .

- (a) Zeigen Sie für den Ansatz, dass $\square A = j$ mit der drehinvarianten und statischen Randvorgabe $A(t, x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ genau dann gilt³, wenn $g(r) = (r^2 - R^2)/4$. Siehe Figur 2

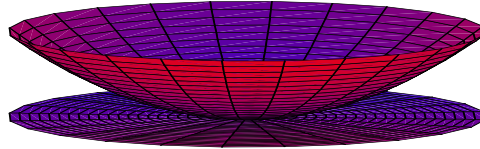


Figure 2: Kreismembran, statisch und gleichförmig belastet

- (b) Welche statische Lösung $A \in \mathcal{C}^2(D : \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{D} : \mathbb{R})$ von $\square A = j$ erfüllt die inhomogene statische Randvorgabe $A(t, x) = C \cos(l\varphi(x))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \in \mathbb{R}$? Hinweis: Zerlegen Sie A gemäß $A = A_0 + A_p$ in eine (statische) Lösung A_0 von $\square A_0 = 0$ (auf D) mit der Randvorgabe $A_0 = C \cos(l\varphi)$ auf ∂D und eine (statische) partikuläre Lösung A_p von $\square A_p = j$ (auf D). Welcher Randvorgabe muss A_p genügen? Blicken Sie zurück auf Bsp. 1e von Blatt 10. Die Figur 3 zeigt die Lösung für $C = 1/4$ und $l = 4$.

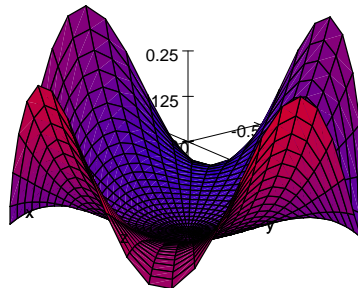


Figure 3: Statisch belastete Membran mit gewellter Randaufhängung

¹Es ist dies ein Beispiel für ein statisches Randwertproblem. Es sagt im Rahmen der Elastomechanik, dass eine statisch und gleichmäßig belastete Kreismembran die Form eines Rotationsparaboloids annimmt. Spannen Sie eine Frischhaltefolie straff über ein mit Wasser halb gefülltes Glas, erhitzen Sie es in der Mikrowelle und warten Sie die Abkühlung ab.

²Statt 'zeittranslationsinvariant' sagt man auch 'statisch'.

³Diese Randvorgabe ist somit statisch und drehinvariant.