

Besuch im Zoo mit Laplace, Schrödinger und d'Alembert

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und L_Ω sei die Menge aller \mathcal{C}^2 -Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$. Wir betrachten nun einige Spezialfälle von Definitionsbereichen Ω . Die Translations- bzw. Drehinvarianz von Δ und Ω legt dann die folgenden 'invarianten' Ansätze für $u \in L_\Omega$ nahe.
 - (a) $\Omega = \mathbb{R}^2$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y) = f(x)$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt. (In y -Richtung translationsinvariante Lösung)
 - (b) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus 0$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt. (Um 0 drehinvariante Lösung)
 - (c) $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus 0$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ für alle $(x, y, z) \in \Omega$ gilt.
 - (d) $\Omega = \mathbb{R}^2$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ für alle $(x, y) \in \Omega \setminus 0$ gilt.
 - (e) $\Omega = \mathbb{R}^2$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine reelle Zahl l und eine Funktion $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $u = r^l f(\varphi)$ auf dem Kartenbereich U der Polarkoordinaten (r, φ) gilt. Hinweis: Die auf ganz \mathbb{C} holomorphe Abbildung $P : z \mapsto z^l$ hat nach Cauchy & Riemann harmonischen Real- und Imaginärteil. Welche Kartenausdrücke haben $P, \Re P$ und $\Im P$ in Polarkoordinaten? Geben Sie den kartesischen Kartenausdruck von u zu $u|_U = r^l \cos(l\varphi)$ und zu $u|_U = r^l \sin(l\varphi)$ für $l = 1, 2, 3$ an und kontrollieren Sie an diesem $\Delta u = 0$.

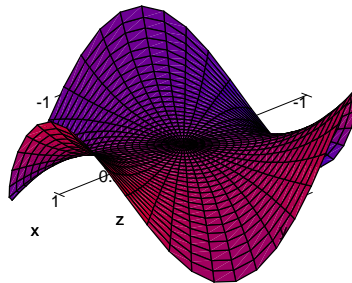


Figure 1: Polarplot von $r^3 \cos(3\varphi)$

2. $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 : \mathbb{C})$ heißt Lösung der freien, parameterreduzierten, 2d-Schrödingergleichung, falls

$$i\partial_t \phi(t, x) = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \phi(t, x) \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Sei $k \in \mathbb{R}$ und $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\phi(t, x) = f(t) \exp(ikx)$ für ein $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann (1) löst, wenn ein $A \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $f(t) = A \exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\Re \phi$ und $\Im \phi$ für $A = 1$. (Siehe Figur 2) In welche Richtung verschiebt sich der Graph von $x \mapsto \phi(t, x)$ mit wachsendem t ? Welche Phasengeschwindigkeit hat ϕ ?

3. Seien $c, k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t) \sin(kx)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Sei L_k die Menge aller solchen Funktionen A , für die überdies $\square A = 0$.

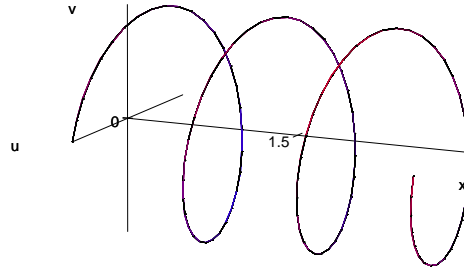


Figure 2: Die Funktion $x \mapsto \phi(0, x)$ für $k = 2\pi$.

- (a) Bestimmen Sie L_k . Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$A_{a,b}(t, x) := (a \cos(ckt) + b \sin(ckt)) \sin(kx)$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Figur 3 zeigt $x \mapsto A_{1,0}(t, x)$ für $k = 1 = c$ zu den Zeiten $t \in \{0, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \pi\}$.

- (b) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = \sin(kx)$ und $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Lösung: $A(t, x) = \cos(ckt) \sin(kx)$.
- (c) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = 0$ und $\partial_t A(0, x) = \frac{1}{\tau} \sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Hier ist $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Lösung: $A(t, x) = \frac{1}{ck\tau} \sin(ckt) \sin(kx)$.
- (d) Wie muss f gewählt werden, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $(kx)^3$ ersetzt wird? Lösung: $f = 0$.
- (e) Wie lautet L_k , wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $\exp(kx)$ ersetzt wird? Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $A_{a,b}(t, x) := (a \exp(ckt) + b \exp(-ckt)) \exp(kx)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

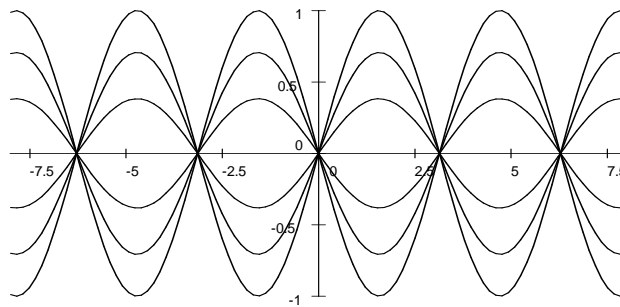


Figure 3: Schnappschüsse einer stehenden Welle

4. Kontrollieren Sie für $A \in L_k$ von Beispiel 3a) oder 3e) d'Alembert's Lösungsformel

$$A(t, x) = \frac{1}{2} \{u(x+ct) + u(x-ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi) d\xi.$$

Sie drückt jede \mathcal{C}^2 -Lösung der Wellengleichung auf \mathbb{R}^2 durch ihre Anfangswerte $A(0, x) = u(x)$ und $\partial_t A(0, x) = v(x)$ aus. Es gilt dabei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Geben Sie die Zerlegung von $A \in L_k$ in einen links- und einen rechtsläufigen Anteil an.