Poissongleichung: *Potential einer Kugel konstanter Quelldichte*

1. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \smallsetminus 0 : \mathbb{R})$ um 0 drehinvariant, dh es existiert eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, sodass $u = f \circ r \equiv f(r)$, wenn r die Standardnorm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass
$$\Delta u = r \cdot \left(\frac{f'(x)}{x}\right)'\Bigg|_{x=r} + n \cdot \left(\frac{f'(x)}{x}\right)\Bigg|_{x=r}.$$

2. Bestimmen Sie die Menge H aller um 0 drehinvarianten $\mathcal{C}^2$-Funktionen $u : \mathbb{R}^n \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$. Bestimmen Sie auch die Teilmenge $H_0 \subset H$ all jener Funktionen mit stetiger Fortsetzung nach 0. Gilt für die stetige Fortsetzung $\overline{u}$ einer Funktion $u \in H_0$, dass $\overline{u}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ harmonisch ist?

3. Bestimmen Sie die Menge I_c aller um 0 drehinvarianten $\mathcal{C}^2$-Funktionen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = c$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in I_c$ für $c > 0$ ihr globales Minimum in 0 und sonst nirgends annimmt. Nimmt eine Funktion $u \in I_c$ für $c > 0$ ein globales Maximum an? Wo nimmt eine Funktion $u \in I_c$ für $c > 0$ ihr globales Maximum in einer abgeschlossenen Kugel um 0 vom Radius R an?

4. Sei $K_R = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| < R\}$. Berechnen Sie für $n \geq 3$ die (nach einem Satz der Vorlesung) eindeutig bestimmte Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$, für die gilt: Es existieren $u \in I_c$ und $v \in H$, sodass
$$\varphi = u \text{ auf } K_R, \quad \varphi = v \text{ auf } \mathbb{R}^n \smallsetminus K_R, \quad \lim_{|p|\to\infty} \varphi(p) = 0.$$
Geben Sie auch das Gradientenfeld von φ an. Besitzt φ für $c > 0$ ein Minimum bzw ein Maximum? Wenn ja, wo wird es angenommen?
Lösung für $n = 3$:
$$\varphi = \begin{cases} \frac{c}{6}\left(r^2 - 3R^2\right) & \text{auf } K_R \\ -\frac{c}{3}\frac{R^3}{r} & \text{auf } \mathbb{R}^n \smallsetminus K_R \end{cases}, \qquad grad_p(\varphi) = \begin{cases} \frac{c}{3}p & \text{auf } K_R \\ \frac{c}{3}\frac{R^3}{|p|^3}p & \text{auf } \mathbb{R}^n \smallsetminus K_R \end{cases}.$$

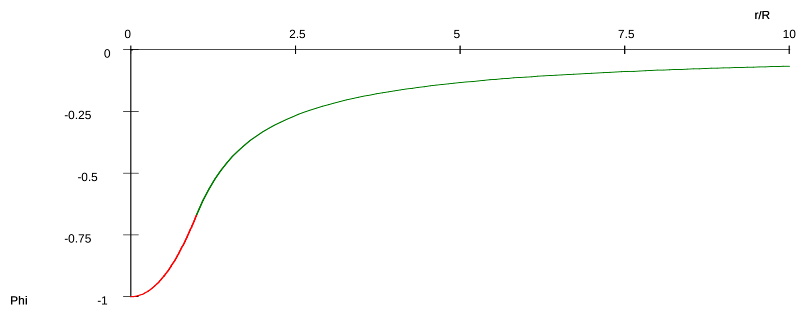

Figure 1: Newtonpotential der Kugel mit konstanter Dichte für $cR^2/2 = 1$

5. (Freiwillig und außer Konkurrenz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit stetiger Fortsetzung nach $\overline{\Omega}$ und mit $\Delta u > 0$ ihr Maximum auf $\partial\Omega$ annimmt. Hinweis: Passen Sie die Beweisdee für das Maximumsprinzip harmonischer Funktionen an.

6. Welche Bindungsenergie hat der Grundzustand eines Wasserstoffatoms nach J J Thomsons Rosinenkuchenmodell, wenn R mit dem Bohrschen Radius
$$a_B = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \hbar^2 / \left(m_e \cdot e^2\right) \approx 0,5\,(29177) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$
gleichgesetzt wird? Hinweis: c muss so gewählt werden, dass $cR^3/3 = e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ gilt.