Name:..Matrikelnr:...

Zahl der abgegebenen Blätter...................

Erste Klausur

1. (8 Punkte) Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 3 und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei ein Skalarprodukt von V. Sei zudem $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ eine positiv orientierte ONB von V. Berechnen Sie für die Funktion $f : V \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $f(v) = \langle e_3, v\rangle / |v|^2$
   (a) (2P) den Kartenausdruck in der kartesischen Karte (x, y, z) zur Basis $\underline{e}$
   (b) (2P) den Kartenausdruck in Standardkugelkoordinaten (r, θ, φ) zur Basis $\underline{e}$
   (c) (2P) den Gradienten von f im Punkt e_1, also $grad_{e_1}(f) =$?
   (d) (2P) die Richtungsableitung von f im Punkt v mit dem Vektor $e_3 \times v$, also $[e_3 \times v]_v\, f =$?

2. (4 Punkte) Sei V ein reeller, Vektorraum der Dimension 3 und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei ein Skalarprodukt von V. Sei zudem $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ eine positiv orientierte ONB von V. Berechnen Sie für das Vektorfeld $X : V \to V$ mit $X(v) = |v|^2 \cdot e_3$
   (a) (2P) die Divergenz im Punkt e_3, also $div_{e_3}(X) =$?
   (b) (2P) die Rotation im Punkt e_1, also $rot_{e_1}(X) =$?

3. (6 Punkte) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (i - z)^2$. Berechnen Sie
   (a) (1P) $|f(1)| =$?
   (b) (1P) $\arg(f(1)) =$?
   (c) (2P) $\sqrt[2]{f(1)} =$? Hauptzweigwurzel wählen!
   (d) (2P) Prüfen Sie mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$ ob f holomorph ist.

4. (2P) Welchen Wert hat das Integral $\int_\gamma \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$ für eine differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, die 0 einmal gegen den Uhrzeigersinn umläuft? Hinweis: der Residuensatz besagt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i Res_{z=0}(f).$$

Lösungen:

1. (a) Die Karte $(x, y, z) : V \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch $\iota d_V = (e_1, e_2, e_3) \cdot (x, y, z)^t$. Da $\underline{e}$ eine ONB ist, folgt $\langle e_3, v\rangle = z(v)$ und $|v|^2 = x^2(v) + y^2(v) + z^2(v)$. Somit gilt

$$f = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ auf } V \setminus 0.$$

(b) Es gilt $z = r\cos\theta$ und $r = |\cdot|$ auf dem Definitionsbereich U der Kugelkoordinaten (r, θ, φ). Somit folgt

$$f = \frac{\cos(\theta)}{r} \text{ auf } U.$$

NB: Anwendung von Δ (in Kugelkoordinaten) ergibt $\Delta f = -2f/r^2$ auf U.

(c) Es gilt nach der Produkt- und Kettenregel

$$grad_v(f) = grad_v \frac{\langle e_3, \cdot\rangle}{|\cdot|^2} = \frac{e_3}{|v|^2} - 2\frac{\langle e_3, v\rangle}{|v|^3} \cdot \frac{v}{|v|}.$$

Für $v = e_1$ folgt daraus $grad_{e_1}(f) = e_3$.

(d) Da f d'bar ist, folgt

$$[e_3 \times v]_v f = \langle e_3 \times v, grad_v(f)\rangle = 0,$$

da ja $\langle e_3 \times v, e_3\rangle = 0 = \langle e_3 \times v, v\rangle$.

2. (a) Es gilt nach der Produktregel

$$div_v(X) = \left\langle grad_v\left(|\cdot|^2\right), e_3\right\rangle + |v|^2 \cdot div_v(e_3) = \langle 2v, e_3\rangle + 0 = 2\langle e_3, v\rangle.$$

Für $v = e_3$ folgt daraus $div_{e_3}(X) = 2$.

(b) Es gilt nach der Produktregel

$$rot_v(X) = grad_v |\cdot|^2 \times e_3 + |v|^2 \cdot rot_v(e_3) = 2v \times e_3 + 0 = 2v \times e_3.$$

Daraus folgt für $v = e_1$

$$rot_{e_1}(X) = 2e_1 \times e_3 = -2e_2.$$

3. (a) Es gilt $f(1) = (i-1)^2 = -2i$ und daher $|f(1)| = |-2i| = 2$.

(b) Aus a) folgt $\arg(f(1)) = \arg(-2i) = -\pi/2$.

(c) Aus a) und b) folgt $\sqrt[2]{f(1)} = \sqrt{2}\exp(-i\pi/4) = 1 - i$.

(d) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+iy) = (x+iy-i)^2 = (x+i(y-1))^2 = x^2 - (y-1)^2 + i2x(y-1).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \Re f(x+iy) = x^2 - (y-1)^2, \\ v(x,y) &= \Im f(x+iy) = 2x(y-1) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2(y-1) \\ 2(y-1) & 2x \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$. Somit ist f holomorph.

4. Die Laurentreihe von $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) \mapsto \exp(1/z)$ um 0 ist

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \dots$$

Somit gilt $Res_0 f = 1$ und gemäß Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i.$$