Komplexe Wegintegration, (Nicht-)Existenz einer Stammfunktion, Residuensatz

1. Das Quadrat mit den Eckpunkten $0, 1, 1+i, i \in \mathbb{C}$ hat die (orientierte!) Kante γ_1 von 0 nach 1, die Kante γ_2 von 1 nach $1+i$, γ_3 von 0 nach i und γ_4 von i nach $1+i$. Die Diagonale von 0 nach $1+i$ sei γ_5. Berechnen Sie die Wegintegrale

$$I_j = \int_{\gamma j} z dz \text{ und } J_j = \int_{\gamma_j} \overline{z} dz$$

für alle j. Kontrollieren Sie, dass $I_1 + I_2 = I_5 = I_3 + I_4$.Warum folgt dies ohne detaillierte Kenntnis der einzelnen Integrale alleine aus der Tatsache, dass die identische Abbildung auf $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion hat? Überprüfen Sie anhand einer Stammfunktion Ihre Resultate für I_j.

Überzeugen Sie sich davon, dass jedoch $J_1+J_2 \neq J_5 \neq J_3+J_4$. Die Funktion $z \mapsto \overline{z}$ auf $\mathbb{C}$ kann somit keine Stammfunktion haben! Überzeugen Sie sich davon nochmals, indem Sie zeigen, dass auf keiner offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ Funktionen $u, v : D \to \mathbb{R}$ existieren, sodass für $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ auf D gilt

$$\begin{aligned} f'(z) &= \partial_x f(x+iy) = x - iy = \overline{z}, \\ f'(z) &= -i\partial_y f(x+iy) = x - iy = \overline{z}. \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = Re^{it}$ und $R \in (0, \pi)$ mithilfe des Residuensatzes

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i.$$

Hinweis: zeigen Sie, dass eine in der Kreisscheibe $|z| < \pi$ holomorphe Funktion g existiert, für die $1/\sin z = g(z)/z$ auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \pi\}$ gilt. Überlegen Sie, dass $g(0) = 1$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von g um 0?

3. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes

$$\lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} \frac{\exp(ikx)}{k^2 + \lambda^2} dk = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|x|}.$$

Überprüfen Sie damit den Fourierschen Umkehrsatz und die in Math. Meth. I berechnete Fouriertransformierte von $e^{-\lambda|x|}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda|x|} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{k^2 + \lambda^2}.$$

Hinweis: Schließen Sie für $x \geq 0$ den Integrationsweg durch einen Halbkreisbogen in der oberen komplexen Halbebene. Den Fall $x < 0$ führen Sie durch die Substitution $k' = -k$ auf $x > 0$ zurück.

4. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes

$$\lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} \frac{\exp(ikx)}{\left[k^2 + \lambda^2\right]^2} dk = \frac{\pi}{2\lambda^3} e^{-\lambda|x|} (1 + \lambda|x|).$$