

Holomorphie; Potenzreihe von \ln um 1; komplexe Kurvenintegrale; gewöhnliche DG auf \mathbb{C}

1. Prüfen Sie die Cauchy-Riemann DGen für \ln im Bereich $\Re z > 0$. Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von \ln (siehe Fig 1) am Definitionsbereich von \ln harmonisch sind. Hinweis: Benützen Sie die Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

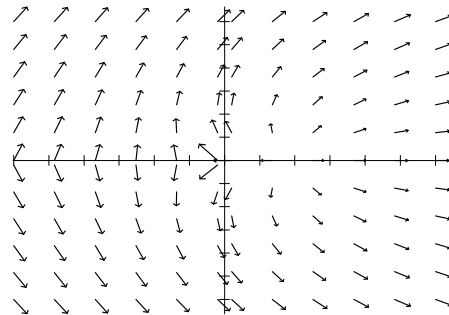


Figure 1: Hauptzweig- \ln als Vektorfeld auf \mathbb{C}

2. Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(\Re f)(x + iy) = x^2 + 2axy + by^2 \tag{1}$$

gilt? Geben Sie zu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alle holomorphen Funktionen f an, für die Gleichung (1) gilt.

Hinweis: Was lässt sich aus $\Delta(\Re f) = 0$ über b erschließen? Lösen Sie dann mit diesem Wissen die Cauchy-Riemann Gleichungen.

3. Sei $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : K_1 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/(1+z)$. Dann gilt für alle $z \in K_1$

$$f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Ersetzen Sie nun in dieser geometrischen Reihe jeden der Summanden $(-1)^n z^n$ durch seine jeweilige Stammfunktion $(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Die so entstehende Reihe ist durch die geometrische Reihe, die den Konvergenzradius 1 hat, majorisiert. (Warum?) Sie definiert somit auf K_1 die holomorphe Funktion¹ $F : K_1 \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

F ist nach dem Satz von der gliedweisen Differenzierbarkeit von Potenzreihen eine Stammfunktion von f . Eine solche ist aber auch die Funktion $z \mapsto \ln(1+z)$ auf K_1 . Es existiert daher ein $c \in \mathbb{C}$, sodass $F(z) = \ln(1+z) + c$ für alle $z \in K_1$. Zeigen Sie, dass $c = 0$. Welche Potenzreihe hat die Funktion \ln um einen Punkt $x \in \mathbb{C}$ mit $x = \Re x > 0$? Wenden Sie den Trick der gliedweisen Integration nun auf die Funktion F an. Zeigen Sie, dass Sie so die Stammfunktion

$$z \mapsto (1+z) \ln(1+z) - z$$

von F auf K_1 erhalten.

¹Für $z = 1$ spezialisiert sich die Potenzreihe von $F(z)$ auf die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$. Diese konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Nach dem Abel'schen Grenzwertsatz konvergiert sie (wie naiv zu erwarten ist) gegen $\ln(2)$. (O. Forster, Analysis 1, §22) Für $z = -1$ hingegen spezialisiert sich die Reihe $-F(z)$ zur harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Diese divergiert. (O. Forster, Analysis 1, § 7)

4. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{2R^3}{3} (2 - \alpha).$$

Beachten: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

5. Freiwillig: Bestimmen Sie Lösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung $y''(z) + y(z)/z^2 = 0$ auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{z : \Im z = 0 \text{ und } \Re z \leq 0\}$ mit $y_1(1) = 1 = y_2'(1)$ und $y_1'(1) = 0 = y_2(1)$. Hinweis: Versuchen Sie einen Potenzansatz $y(z) = z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und dem Hauptzweig-Logarithmus \ln . Bestimmen Sie für Ihre Lösungen y_1, y_2 die Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \searrow 0} y_k(x \pm i\varepsilon)$ für $x \neq 0$. Lösen die dadurch definierten Funktionen

$$y_{k,\pm} : \mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \lim_{\varepsilon \searrow 0} y_k(x \pm i\varepsilon)$$

die reelle DG $y''(x) + y(x)/x^2 = 0$ jeweils auf $\mathbb{R}_{>0}$ bzw $\mathbb{R}_{<0}$? Gewinnen Sie aus $(y_{1,+}, y_{2,+})$ je ein *reelles* Fundamentalsystem dieser reellen DG auf $\mathbb{R}_{>0}$ bzw $\mathbb{R}_{<0}$.