Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 4, 28. Oktober 2013

Laplaceoperator in Polar- und Kugelkoordinaten

1. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \phi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.

   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien von ρ bzw ϕ.

   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$ nach der Standardbasis.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.

   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[1] $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$.

   (e) Sei $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$. Zeigen Sie, dass $\Delta f = \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2\right) f$ auf U.

   Hinweis: $\Delta f = \left[\delta_1^\psi\right]^2 f + \left[\delta_2^\psi\right]^2 f$. Drücken Sie die iterierte Richtungsableitung $\left[\delta_i^\psi\right]^2 f = \left[\delta_i^\psi\right]\left(\left[\delta_i^\psi\right] f\right)$ durch (iterierte) Richtungsableitungen unter δ_1^Φ und δ_2^Φ aus.

2. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie Δf wahlweise mit kartesischen oder polaren Koordinaten für die Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit
   a) $f = x^2 + y^2$, b) $f = x^2 - y^2$, c) $f = x^2 \cdot y^2$,
   d) $f = \left(a^2 + x^2 + y^2\right)^{-1}$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$, e) $f = \sin(kx)\, e^{ky}$ für ein $k \in \mathbb{R}$.

3. Bestimmen Sie für $dim(V) = 2$ die elektrische Potentialfunktion Φ_p eines Punktdipols, der in $0 \in V$ sitzt, und das Dipolmoment $p \in V$ hat. Überprüfen Sie in Polarkoordinaten das Ergebnis von Bsp 3b von Blatt 3, dass $\Delta\Phi_p = 0$.[2] Hinweis: $\Phi_p(v)$ ergibt sich mit $p = |p| \cdot e \in V$ für alle $v \in V \setminus 0$ aus $2\pi\varepsilon_0 \cdot \Phi_p(v) := \lim_{\varepsilon \searrow 0}\left[\ln\left|v - \frac{\varepsilon}{2}e\right| - \ln\left|v + \frac{\varepsilon}{2}e\right|\right]|p|/\varepsilon$. Zeigen Sie $2\pi\varepsilon_0 \cdot \Phi_p(v) = -[p]_v \ln|\cdot| = -\langle p, v\rangle / |v|^2$. Somit gilt für $p = |p|\, e_1$ auf dem Kartenbereich U der Polarkoordinaten $2\pi\varepsilon_0 \cdot \Phi_p = -|p|\cos(\phi)/r$. Welchen Kartenausdruck hat $2\pi\varepsilon_0 \cdot \Phi_p$ in der Standardkarte?

4. Auf dem Kartenbereich U der Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2$ seien $f_n = r^n \cos(n\phi)$ und $g_n = r^{-n}\cos(n\phi)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $\Delta f_n = \Delta g_n = 0$. Geben Sie für $n = 0, 1, 2$ die Kartenausdrücke von f_n und g_n in der Standardkarte an. Sind f_n bzw g_n für $n = 0, 1, 2$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ oder gar $\mathbb{R}^2$ zu $\mathcal{C}^2$-Funktionen fortsetzbar? Figur 1 zeigt f_3.

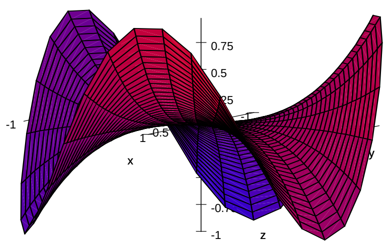

Figure 1: Der Graph von $f_3 = x^3 - 3xy^2$

5. Seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^3$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie $\Delta \cos\theta = -2\cos(\theta)/r^2$. Hinweis: Benutzen Sie Δ in Kugelkoordinaten. Welchen Kartenausdruck hat $\cos\theta$ bzw $\Delta\cos\theta$ in der Standardkarte? Lesen Sie daran ab: $\cos\theta$ und $\Delta\cos\theta$ sind stetig nach $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ fortsetzbar. Ist die stetige Fortsetzung von $\cos\theta$ bzw $\Delta\cos\theta$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion?

---

[1] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.

[2] Φ_p idealisiert das Potential zweier langer, entgegengesetzt geladener, zureinander paralleler, dünner Drähte im Nahbereich der Drähte. Der Abstand der Drähte ist viel kleiner als ihre Länge.