Divergenz, Laplace, Rotation

1. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Sei $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Zeigen Sie $div\,(X) = 0$. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $Y = f\left(x^2 + y^2\right) L$. Zeigen Sie $div\,(Y) = 0$.

2. V sei ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm.
   (a) Für ein $k \in V$ sei $f(v) := \sin \langle k, v \rangle$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie $\Delta f = -\|k\|^2 f$.
   (b) Für $k, q \in V$ sei $f(v) := \langle k, v \rangle \langle q, v \rangle$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie $\Delta f = 2 \langle q, k \rangle$. Figur 1 zeigt den Spezialfall $n = 2$ für $\langle q, k \rangle = 0$, eine sogenannte Sattelfläche.

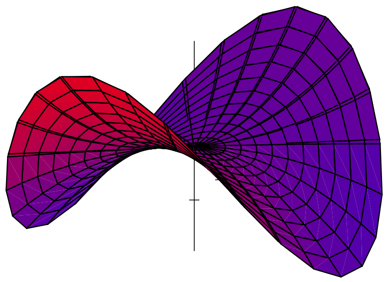

Figure 1: Die Funktion $f\,(x, y) = xy$

3. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie Δf für die folgenden Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.
   (a) $f := \ln r$ auf $U = V \setminus 0$. Lösung: $\Delta f = (n-2)/r^2$. Also: für $n = 2$ gilt $\Delta f = 0$.
   (b) Sei $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ und $f(v) = \langle e, v \rangle \|v\|^{-2}$ für alle $v \in U = V \backslash 0$. Lösung: $\Delta_v f = 2\,(2-n) \langle e, v \rangle \|v\|^{-4}$.
   (c) Sei $e \in V \setminus 0$ und $f(v) = \langle e, v \rangle \|v\|^{-n}$ für alle $v \in U = V \setminus 0$. Lösung: $\Delta f = 0$. Hinweis: Zeigen und nutzen Sie $[e]\, r^{2-n} = (2-n)\, f$. [1]

4. Sei $e \in V = \mathbb{R}^3$ mit $\|e\| = 1$ und $C \in \mathbb{R}$. Es gelte[2] auf $U = V \backslash (\mathbb{R} \cdot e)$ für das Vektorfeld B

$$B(p) = C \frac{e \times p}{\|e \times p\|^2}.$$

   B hat die Symmetrien: $B(p + \lambda e) = B(p)$ und $B(R\,(p)) = R\,(B(p))$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und R Drehung um e. Beachte: $\|e \times p\|$ ist der Abstand von p zur Achse $\mathbb{R} \cdot e$.
   (a) Zeigen Sie $div(B) = 0$ und $rot(B) = 0$ auf U.
   (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $A(p) = f(\|e \times p\|) \cdot e$ (auf U) ein Vektorpotential zu B. Finden Sie also eine Lösung A von $B = rot(A)$. Gibt es mehrere Lösungen? [3]
   (c) Ist B konservativ?

[1] f ist daher für $n \neq 2$ die Potentialfunktion eines Punktdipols. Der 2d Punktdipol ist im Fall b) enthalten.
[2] B ist für $C = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R} \cdot e$ in Richtung e fließenden Stromes der Stärke I.
[3] Eine Lösung ergibt sich mit $f(x) = -C \ln(x)$.