Proseminar Mathematische Methoden der Physik II — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 1, 7. Oktober 2013

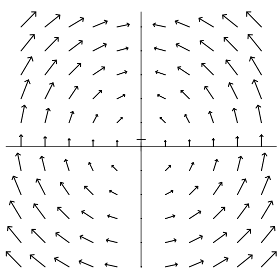
Niveaumenge, Richtungsableitung, Gradient, Kurvenintegal

1. Skizzieren Sie zu den Punkten $p \in S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (1,-1)\}$ die Niveaumengen $N_p[f]$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Kontrollieren Sie, ob $grad_p[f]$ in den regulären Punkten von S senkrecht auf die Tangente von $N_p[f]$ im Punkt p steht. Wählen Sie im $\mathbb{R}^2$ das Standardskalarprodukt und:
   (a) $f(x,y) = x$,
   (b) $f(x,y) = x + y$,
   (c) $f(x,y) = x - y$,
   (d) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
   (e) $f(x,y) = x^2 - y^2$,
   (f) $f(x,y) = xy$.

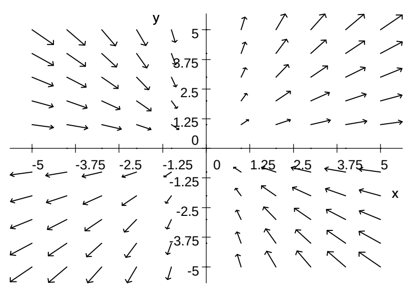
2. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $X_p[f]$ der Funktionen f aus Bsp 1 im Punkt $p = (1,1)$ unter dem Vektor $X = (1,-1)$.

3. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie $grad(f)$ der folgenden Funktionen vom Typ $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.
   (a) Sei $k_i \in V$ für $i = 1, ..., m$ und $f(p) := \sum_{i=1}^{m} \langle k_i, p \rangle^2$ für alle $p \in V$.
   (b) $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \backslash 0$. Skizzieren Sie $grad(f)$ für $n = 2$.
   (c) Sei $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ und $f(p) = \frac{1}{r(p)} \langle e, p \rangle$ für alle $p \in U = V \backslash 0$. Die Zahl $f(p)$ ist also der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Die linke Figur zeigt das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$.

4. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $X : V \to V$, $\quad (x,y) \mapsto \left(x^2 y, xy^2\right)$ (Rechte Figur). Berechnen Sie das Kurvenintegral von X längs $\gamma : [0,1] \to V$, $\quad t \mapsto \left(1-t, t^2\right)$. Skizzieren Sie die Bahn von γ, also die Punktmenge $\{\gamma(t) : 0 \le t \le 1\}$.



Das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$



Das Vektorfeld $\left(x^2 y, xy^2\right)$