Name:...Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter..................

Erste Klausur

1. (4 Punkte) Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n. Eine lineare Abbildung $Q : V \to V$ sei symmetrisch bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von V. Berechnen Sie für die Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(v) = \langle v, Qv \rangle$ für $v \in V$
   (a) $d_v f(\xi) = ?$ für $\xi \in V$
   (b) $grad_v(f) = ?$
   (c) $\Delta_v f = ?$

2. (4 Punkte) Sei (x, y) die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$L = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$
   (a) $div(L) = ?$
   (b) Überprüfen Sie, ob L (bezüglich des Standardskalarproduktes) rotationsfrei ist.
   (c) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$
   für feste Werte $a, b \in \mathbb{R}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie: $\int_\gamma L = ?$ (bezüglich des Standardskalarprodukts).

3. (4 Punkte) Sei $z = e^{i3\pi/2}$. Berechnen Sie
   (a) $|z| = ?$
   (b) $\arg(z) = ?$
   (c) Real- und Imaginärteil von z
   (d) $\sqrt[3]{z} = ?$ (Hauptzweig; Real- & Imaginärteil angeben; Hinweis: $\sin \pi/6 = 1/2$)

4. (4 Punkte) Überprüfen Sie mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$ ob die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z/\overline{z}$ holomorph ist.

Lösungen:

1. (a) Zuerst die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}[\xi]_v f &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{f(v+\varepsilon\xi)-f(v)}{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\langle v+\varepsilon\xi, Q(v+\varepsilon\xi)\rangle-\langle v,Qv\rangle}{\varepsilon}\\ &= \langle \xi, Qv\rangle+\langle v,Q\xi\rangle = 2\langle Qv,\xi\rangle .\end{aligned}$$

Die Abbildung $V\ni\xi\mapsto[\xi]_v f$ ist linear. Daher ist f d'bar und es gilt

$$d_v f(\xi)=2\langle Qv,\xi\rangle .$$

(b) Aus der Bedingung $\langle grad_v(f),\xi\rangle = d_v f(\xi)$ für alle $\xi\in V$ folgt

$$grad_v(f)=2Qv.$$

(c) Wegen $\Delta_v f = div_v[grad(f)]$ gilt mit der Matrix $\left[Q_i^j\right]$ von Q bezüglich einer Basis $\underline{e}=(e_1,\dots e_n)$ von V

$$grad_v(f)=\sum_{i,j=1}^n 2Q_j^i v^j\cdot e_i$$

und somit

$$div_v[grad(f)]=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial v_i}\sum_{j=1}^n 2Q_j^i v^j=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 2Q_j^i\delta_i^j=2\sum_{i=1}^n Q_i^i=2SpQ.$$

Also gilt $\Delta_v f=2SpQ$ für alle $v\in V$.
Nachbemerkung: Ist die lineare Abbildung Q positiv definit, dann ist die Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_Q : V\times V\to V \text{ mit } \langle v,w\rangle_Q=\langle v,Qw\rangle$$

ebenfalls ein Skalarprodukt von V. Berechne das Differential, das Gradientenfeld und Laplace von $f_Q\equiv f: v\mapsto\langle v,Qv\rangle=\langle v,v\rangle_Q$ noch bezüglich dieses zweiten Skalarproduktes von V im Punkt $v\in V$:

- Für das Differential folgt wegen $f_Q(v)=\langle v,Qv\rangle=\langle v,v\rangle_Q$ wie oben $d_v f_Q(\xi)=2\langle v,\xi\rangle_Q = 2\langle Qv,\xi\rangle$.
- Aus $d_v f_Q(\xi)=\left\langle grad_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}(f_Q),\xi\right\rangle_Q$ für alle $\xi\in V$ folgt $grad_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}(f_Q)=2v$. Für $Q\neq\iota d_V$ existieren also Punkte $v\in V$ mit

$$grad_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}(f_Q)=2v\neq 2Qv=grad_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle}(f_Q).$$

- Aus $grad_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}(f_Q)=2v$ folgt $div_v\left(grad_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}(f_Q)\right)=\Delta_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}f_Q=2n$. Für Q mit $SpQ\neq n$ gilt also

$$\Delta_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}f_Q=2n\neq 2SpQ=\Delta_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle}f_Q.$$

Anregung: Berechnen Sie $grad^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}f_P$ und $\Delta_v^{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q}f_P$ für $Q:V\to V$ linear positiv definit und $P:V\to V$ linear symmetrisch bezüglich eines fest gewählten Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(a) Es gilt $div(L)=\partial_x(-y)+\partial_y(x)=0$.

(b) L ist rotationsfrei, falls $\partial_1\langle e_2,L\rangle=\partial_2\langle e_1,L\rangle$. Dabei ist (e_1,e_2) die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Nun gilt aber $\partial_1 L^2=\partial_x x=1$ und $\partial_2 L^1=\partial_y(-y)=-1$. Daher ist L nicht rotationsfrei.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma L &= \int_0^{2\pi}\langle L(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left\langle\begin{pmatrix}-b-R\sin t\\ a+R\cos t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-R\sin t\\ R\cos t\end{pmatrix}\right\rangle dt\\ &= \int_0^{2\pi}R\left[b\sin t+R\sin^2 t+a\cos t+R\cos^2 t\right]dt\\ &= 2\pi R^2.\end{aligned}$$

(a) Es gilt $z = \cos(3\pi/2) - i\sin(3\pi/2) = -i$ und somit $|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$.

(b) Es gilt $z = e^{i3\pi/2} = e^{i3\pi/2}e^{-i2\pi} = e^{-i\pi/2}$ und daher $\arg z = -\pi/2$.

(c) $\Re z = 0$ und $\Im z = -1$.

(d) Es gilt $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\arg(z)}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} - i\frac{1}{2}$.

2. Es gilt für $0 \neq z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

und daher

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \Re f(z) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \\ v(x,y) &= \Im f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \\ \partial_y v(x,y) &= \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - 2xy2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\partial_x u(1,1) = 1 \neq 0 = \partial_y v(1,1).$$

Also ist f nicht holomorph.