

Komplexe Zahlen, Wurzel, Logarithmus und Holomorphie

1. Seien $w, z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $|w \cdot z| = |w| |z|$, $|1/z| = 1/|z|$.
2. Geben Sie für die vier Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$ die folgenden Größen an: $|z|, \Re z, \Im z, \arg(z)$.
3. $\arg(1 + i\sqrt{3}) = ?$, $\arg(\sqrt{3} - i) = ?$ Berechnen Sie Betrag und Argument von $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$ und von $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$ für den Hauptzweig der Wurzelfunktion. Geben Sie auch die Hauptzweigwerte von $\ln(1 + i\sqrt{3})$ und $\ln(\sqrt{3} - i)$ an.
4. Kontrollieren Sie für die folgenden Funktionen f , ob die jeweils zugehörigen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.
 - (a) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$.
 - (b) $f: \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$.
 - (c) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(z)$.
 - (d) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha \in \mathbb{R}$.

Legen Sie eine Liste der (harmonischen!) Funktionen $\Re f$ und $\Im f$ an, die dieses Beispiel abwirft. Geben Sie auch die Kartenausdrücke dieser Funktionen in Polarkoordinaten an.

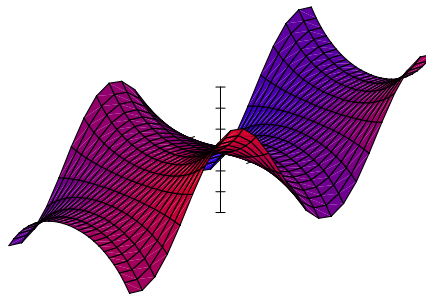


Figure 1: Die harmonische Funktion $\sin(x) \cosh(y)$

5. Geben Sie reelle Funktionen u, v an, sodass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ gilt:

$$u(x, y) + iv(x, y) = \ln(x + iy).$$

Hier bezeichnet \ln den Hauptzweig der Logarithmusfunktion. Drücken Sie u und v durch elementare reelle Funktionen aus. Berechnen Sie: $i^i := e^{i \ln i} = ?$