Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 5, 5. November 2012

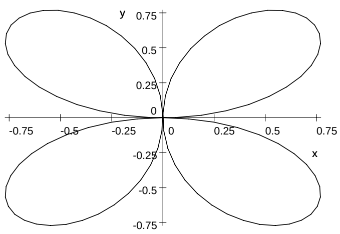
---

div, rot, grad in nichtlinearen Karten; Quadrupolpotential kartenfrei

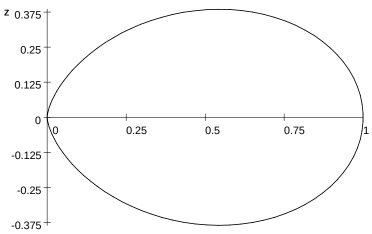
1. Für das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ gelte in der Standardkarte (x, y, z) von $\mathbb{R}^3$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$f = \frac{2xy}{r^5}.$$

(f ist ein Quadrupolpotential.) Auf dem Definitionsbereich U der Kugelkoordinaten $\Phi = (r, \theta, \phi)$ gilt daher $f = \frac{1}{r^3} \sin^2(\theta) \sin(2\phi)$.



Polardiagramm von $\sin(2\phi)$



Polardiagramm von $\sin^2 \theta$

(a) Berechnen Sie auf U bezüglich des Standardskalarproduktes die Komponenten von $grad(f)$ zur Kartenbasis von Φ.

(b) Leiten Sie aus dem Ergebnis von a) ab, dass $\Delta f = 0$ auf U.

(c) Zeigen Sie $\Delta f = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ unter Verwendung der Standardkarte.

2. Seien (r, ϕ, z) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ und sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Auf dem Kartenbereich U von (r, ϕ, z) gelte $X = \frac{f(r)}{r^2} \delta_\phi$. Zeigen Sie (unter Verwendung der Formel für die Rotation in einem krummlinigen Koordinatensystem), dass $rot(X) = \frac{f'(r)}{r}(0, 0, 1)$ auf U.

3. Der Vektorraum V habe die Dimension 3 und die lineare Abbildung $Q : V \to V$ sei symmetrisch bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von V. Es gilt also $\langle v, Qw \rangle = \langle Qv, w \rangle$ für alle $v, w \in V$. Sei $\Phi : V \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(v) = \frac{\langle v, Qv \rangle}{|v|^5}.$$

(a) Berechnen Sie das Gradientenfeld von Φ und zeigen Sie, dass $\Delta \Phi = 0$ genau dann, wenn $Sp(Q) = 0$. Dabei ist die Spur einer linearen Abbildung mit der Spur ihrer Matrix $M(Q; \underline{e})$ zu einer beliebigen Basis $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ von V ident. Es gilt also $Q(e_i) = \sum_{j=1}^3 e_j \cdot M(Q; \underline{e})^j{}_i$ und $Sp(Q) = \sum_{i=1}^3 M(Q; \underline{e})^i{}_i$.

(b) (Freiwillig) Zeigen Sie, dass $Sp(Q)$ wohldefiniert ist, dass also $\sum_{i=1}^3 M(Q; \underline{e})^i{}_i$ nicht von der speziellen Wahl der Basis $\underline{e}$ abhängt.

(c) Welcher 'Quadrupoltensor' Q reproduziert das Potential von Bsp. 1)?