Laplaceoperator auf $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten; 2d Dipol; infinitesimale Stokesformel

1. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \phi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.

   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien von ρ bzw. ϕ.

   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$ nach der Standardbasis.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.

   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[1] $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \phi_0)$.

   (e) Sei $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$. Zeigen Sie, dass auf U gilt

   $$\Delta f = \left(\delta_1^\Phi\right)^2 [f] + \frac{1}{\rho}\delta_1^\Phi [f] + \frac{1}{\rho^2}\left(\delta_2^\Phi\right)^2 [f].$$

   Die Kurznotation für diesen Kartenausdruck des Laplaceoperators in Polarkoordinaten ist

   $$\Delta = \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2.$$

   Hinweis: $\Delta f = \left(\delta_1^\psi\right)^2 [f] + \left(\delta_2^\psi\right)^2 [f]$. Drücken Sie die iterierte Richtungsableitung $\left(\delta_i^\psi\right)^2 [f]$ durch (iterierte) Richtungsableitungen nach δ_1^Φ und δ_2^Φ aus.

2. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie Δf wahlweise mit kartesischen oder polaren Koordinaten für die Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit

   (a) $f = x^2 + y^2$

   (b) $f = x^2 - y^2$

   (c) $f = x^2 \cdot y^2$

   (d) $f = \left(a^2 + x^2 + y^2\right)^{-1}$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

   (e) $f = \sin(kx)\, e^{ky}$ für ein $k \in \mathbb{R}$.

3. Bestimmen Sie für $dim(V) = 2$ die elektrische Potentialfunktion Φ_p eines Punktdipolmoments $p \in V$, das in $0 \in V$ sitzt, und kontrollieren Sie, dass $\Delta\Phi_p = 0$.[2]

   Hinweis: $\Phi_p(v)$ ergibt sich für das Dipolmoment $p = |p| \cdot e \in V$ für alle $v \in V \setminus 0$ durch den Grenzübergang

   $$\Phi_p(v) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{|p|}{\varepsilon}\left[\ln\left|v - \frac{\varepsilon}{2}e\right| - \ln\left|v + \frac{\varepsilon}{2}e\right|\right].$$

4. (Freiwillig) $\underline{e} = (e_1, \ldots e_n)$ sei eine Basis des Vektorraums V mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Das Vektorfeld $X : V \supset U \to V$ sei auf U differenzierbar. $\gamma_{ij} : I \to U$ sei eine stückweise C^1-Kurve. Sie durchlaufe den Rand des Parallelogramms $\Gamma_{ij} = \left\{p + \lambda e_i + \mu e_j : \lambda, \mu \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]\right\}$ zuerst in Richtung e_i, dann in Richtung e_j usw.

   (a) Zeigen Sie, dass mit den kovarianten Komponentenfunktionen $X_i = \langle e_i, X\rangle$ von X und den partiellen Ableitungen $\partial_i = \partial_i^{\underline{e}}$ für $p \in U$ folgt:

   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\gamma_{ij}} X = \left[\partial_i X_j - \partial_j X_i\right](p).$$

[1] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.

[2] Φ_p idealisiert das Potential zweier langer, entgegengesetzt geladener, zur 3-Achse paralleler, dünner Drähte im Nahbereich der Drähte. Der Abstand der Drähte ist viel kleiner als ihre Länge.

(b) Für die n^2 Zahlen $I_{ij} := [\partial_i X_j - \partial_j X_i]\,(p)$ gilt $I_{ij} = -I_{ji}$ und daher $I_{ii} = 0$. Wie viele Paare $(i,j) \in \{1, \dots n\}^2$ mit $i < j$ gibt es? Für welches n sind es genau n Stück?

(c) Sei nun $n = 3$ und $\underline{e}$ positiv orientiert. Mit einem noch unbekannten Skalarfeld C auf U sei das Vektorfeld $rotX$ durch

$$rotX = C\,[(\partial_2 X_3 - \partial_3 X_2) \cdot e_1 + (\partial_3 X_1 - \partial_1 X_3) \cdot e_2 + (\partial_1 X_2 - \partial_2 X_1) \cdot e_3]$$

definiert. Kann C so gewählt werden, dass für das Flussintegral von $rotX$ durch Γ_{ij}

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Gamma_{ij}} \langle rotX, df_{ij} \rangle = I_{ij}$$

gilt? Lösung: $C = 1/\sqrt{det\,(G_e)}$.

(d) Überprüfen Sie, dass $rotX$ mit $C = 1/\sqrt{det\,(G_e)}$ nicht von der Wahl der (positiv orientierten) Basis $\underline{e}$ abhängt.