Divergenz, Laplace, Rotation, Hamiltonsches Vektorfeld

1. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Sei $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Zeigen Sie $div\,(X) = 0$. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $Y = f\left(x^2 + y^2\right) L$. Zeigen Sie $div\,(Y) = 0$.

2. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt von V und $r := \|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Berechnen Sie Δf über $\Delta f = div\,(grad\,(f))$ für die folgenden Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset V$ offen.[1]

   (a) Für ein $k \in V$ sei $f(v) := \sin \langle k, v \rangle$ für alle $v \in V$.

   (b) $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \setminus 0$. Skizzieren Sie $grad(f)$ für $n = 2$.

   (c) Sei $e \in V$ mit $\|e\| = 1$ und $f(v) = \frac{1}{r(v)} \langle e, v \rangle$ für alle $v \in U = V \setminus 0$. [2]

3. Sei $e \in V = \mathbb{R}^3$ mit $\|e\| = 1$ und $C \in \mathbb{R}$. Es gelte[3] auf $U = V \setminus (\mathbb{R} \cdot e)$ für das Vektorfeld B

$$B(p) = C \frac{e \times p}{\|e \times p\|^2}.$$

   B hat die Symmetrien: $B(p + \lambda e) = B(p)$ und $B(R\,(p)) = R\,(B(p))$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und R Drehung um e. Beachte: $\|e \times p\|$ ist der Abstand von p zur Achse $\mathbb{R} \cdot e$.

   (a) Zeigen Sie $div(B) = 0$ und $rot(B) = 0$ auf U.

   (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $A(p) = f(\|e \times p\|) \cdot e$ (auf U) ein Vektorpotential zu B. Finden Sie also eine Lösung A von $B = rot(A)$. Gibt es mehrere Lösungen? [4]

   (c) Ist B konservativ?

4. (Freiwillig) Sei $\underline{e} = (e_1, \ldots e_{2n})$ eine Basis des Vektorraums V und $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ sei bilinear. Es gelte $\omega\,(e_i, e_{j+n}) = \delta_{ij} = -\omega\,(e_{i+n}, e_j)$ und $\omega\,(e_i, e_j) = 0 = \omega\,(e_{i+n}, e_{j+n})$ für $i, j \in \{1, \ldots n\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\omega\,(v, w) = -\omega\,(w, v)$ für alle $v, w \in V$. (ω ist schiefsymmetrisch.)

   (b) Zeigen Sie, dass $\omega\,(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ nur dann, wenn $v = 0$. (ω ist nicht ausgeartet.)

   (c) Geben Sie für $n = 2$ die Matrix Ω mit den Einträgen $\Omega_{ij} = \omega\,(e_i, e_j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots 4\}$ an. (Gramsche Matrix von ω zur Basis $\underline{e}$.) Rechnen Sie nach: $\Omega^t = \Omega^{-1} = -\Omega$.

   (d) Auf einer offenen Teilmenge $U \subset V$ sei ein $\mathcal{C}^2$-Skalarfeld H (Hamiltonfunktion) definiert. Geben Sie für einen Punkt $v \in U$ den (eindeutig bestimmten!) Vektor $h\,(v)$ an, der für jeden Vektor $X \in V$

$$d_v H\,(X) = \omega\,(h\,(v)\,, X)$$

   erfüllt. Die Abbildung $h : U \to V$ heißt Hamiltonsches Vektorfeld. Seine Integralkurven sind die Lösungskurven eines Hamilton-mechanischen Systems. Lösung:

$$h\,(v) = -\,(e_1, \ldots e_{2n}) \cdot \Omega^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_v H\,(e_1) \\ \vdots \\ d_v H\,(e_{2n}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\partial^{\underline{e}}_{i+n} H\,(v)\right) \cdot e_i - \left(\partial^{\underline{e}}_{i} H\,(v)\right) \cdot e_{i+n} \right\}$$

   (e) Zeigen Sie, dass h divergenzfrei und tangential an die Niveauflächen von H ist. Zeigen Sie, dass für die Integralkurven γ von h folgt, dass $H \circ \gamma = const.$ (Energieerhaltung)

   (f) Setzen Sie $n = 1$ und $H\,(v) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$ mit $v = (x, p)$. Geben Sie h an.

[1] Arbeiten Sie dabei entweder ohne Benützung einer Basis, also koordinatenfrei, oder mithilfe der Koordinaten des Vektorraumes zu einer ONB $\underline{e}$. Benützen Sie die Faulenzerregeln.

[2] $f(p)$ ist also der Kosinus des Winkels zwischen e und p. Fig. 1 zeigt das Vektorfeld $\left(-xy, x^2\right)$.

[3] B ist für $C = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R} \cdot e$ in Richtung e fließenden Stromes der Stärke I.

[4] Eine Lösung ergibt sich mit $f(x) = -C \ln(x)$.

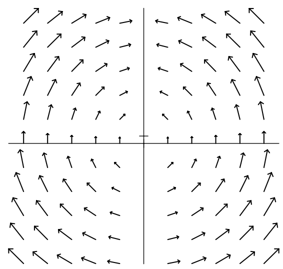

Fig.1