
Dualität $V^* \simeq V$, Gradientenfeld, Existenz eines Potentials

1. Sei V ein Vektorraum mit der Basis $\underline{e} = (e_1, e_2)$. Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von V habe bezüglich der Basis $\underline{e}$ die Gram'sche Matrix
$$G_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die lineare Abbildung $L : V \to \mathbb{R}$ erfülle $L(e_1) = 0$ und $L(e_2) = 1$. Finden Sie einen Vektor $l \in V$, sodass $L(v) = \langle l, v \rangle$ für alle $v \in V$. Gibt es einen zweiten solchen Vektor?

2. Das elektrische Potential eines Punktdipols ist eine Funktion des Typs $\Phi : V \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit
$$\Phi(v) = \frac{\langle p, v \rangle}{|v|^3},$$
wobei V ein 3d Vektorraum ist, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt von V bezeichnet, und der Vektor des Dipolmoments $p \in V \setminus 0$ fest gewählt ist. Eine lineare Abbildung $R : V \to V$ mit $\langle Rv, Rw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$ und $detR > 0$ heißt Drehung von V. Ist $p \in V$ Eigenvektor einer Drehung R zum Eigenwert 1, dann heißt R Drehung um die Achse $\mathbb{R} \cdot p$.
   (a) Zeigen Sie, dass für jede Drehung $R : V \to V$ um die Achse $\mathbb{R} \cdot p$ gilt: $\Phi(Rv) = \Phi(v)$.
   (b) Skizzieren Sie die Schnittmengen einiger Niveaumengen von Φ mit einem 2d Unterraum von V, der p enthält. Hinweis: Machen Sie ein Polardiagramm.
   (c) Zeigen Sie, dass für $v \in V \setminus 0$
   $$grad_v[\Phi] = \frac{p}{|v|^3} - 3\frac{\langle p, v \rangle}{|v|^4} \cdot \frac{v}{|v|}.$$
   (d) Geben Sie $grad_v[\Phi]$ für $p = e_3$ und $v = \cos\theta \cdot e_3 + \sin\theta \cdot e_1$ mit $0 \leq \theta < 2\pi$ als Funktion von θ an.[1] Wie kann der allgemeine Fall auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden?

3. Sei (x, y) die Standardkarte von $V = \mathbb{R}^2$. Für $L : V \to V$ gelte $L = (-y, x)$ (Drehvektorfeld). Es soll nun mit verschiedenen Methoden gezeigt werden, dass L kein Potential hat, d.h., dass *keine* Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $L = grad(f)$.
   (a) Direkte Methode: Zeigen Sie, dass die beiden Differentialgleichungen (bezüglich der Standardbasis) $-y = \partial_1 f$ und $x = \partial_2 f$ keine Lösung f haben.
   (b) Indirekt: Zeigen Sie, dass L nicht rotationsfrei ist.
   (c) Sei $\gamma_1 : [-R, R] \to V$ mit $\gamma_1(t) = (t, 0)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_1} L = 0$. Sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to V$ mit $\gamma_2(t) = (R\cos t, R\sin t)$. Zeigen Sie $\int_{\gamma_2} L = R^2\pi$. Warum folgt daraus, dass L kein Potential hat?
   (d) Sei γ eine Kurve in V, deren Bildmenge der Rand eines achsenparallelen Quadrats mit der Seitenlänge 2ε und mit dem Mittelpunkt $(a, b) \in V$ ist. Die Kurve durchlaufe den Rand im Gegenuhrzeigersinn einmal. Zeigen Sie, dass $\int_\gamma L = 8\varepsilon^2 =$ Doppelte Fläche des Quadrats. Das Integral ist also unabhängig von (a, b).
   Hinweis: Die untere Seite des Quadrats kann folgendermaßen durchlaufen werden
   $$\gamma_1 : [-\varepsilon, \varepsilon] \to V \text{ mit } \gamma_1(t) = (a + t, b - \varepsilon).$$
   Wählen Sie für die drei weiteren Seiten analoge Kurven.
   (e) Sei nun $X = \frac{1}{x^2+y^2} L$ auf $V \setminus 0$. Sei γ wie oben eine Kurve, die den Rand eines (beliebigen) Quadrats im Gegenuhrzeigersinn einmal durchläuft. Zeigen Sie
   $$\int_\gamma X = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } (0,0) \text{ innerhalb des Quadrats liegt} \\ 0 & \text{falls } (0,0) \text{ außerhalb des Quadrats liegt} \end{cases}.$$
   Falls γ durch $(0, 0)$ führt, ist $\int_\gamma X$ nicht definiert. Hinweis: Auf der geschlitzten Ebene gilt $X = grad(\phi)$.

---

[1] (e_1, e_2, e_3) sei eine ONB von V.