Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 14, 28. Jänner 2013

Name:..Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter..................; *Betreuer ankreuzen: **B**est, **G**rübl, **O**stermann*

Zweite Klausur

1. (4P) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$ und sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = (\pi + i\alpha) \cdot t$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) (2P) Berechnen Sie
   $$\int_\gamma \overline{f(z)} dz = ?$$
   (b) (2P) Zeigen Sie
   $$i \int_\gamma \cos(z)\, dz = \sinh(\alpha).$$

2. (4P) Seien $c, L \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $A : \mathbb{R} \times [0,L] \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $\left(c^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) A = 0$ und $A(t,0) = A(t,L) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Überdies gelte
   $$A(0,x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \text{ und } \partial_t A(0,x) = \frac{3\pi c}{L} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$
   Geben Sie Zahlen $A_n, B_n, \omega_n \in \mathbb{R}$ an, sodass für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,L]$
   $$A(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

3. (4P) Seien $\hbar, m \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $\psi : \mathbb{R} \times [0,L] \to \mathbb{C}$ eine C^2-Funktion mit
   $$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi \tag{1}$$
   und $\psi(t,0) = \psi(t,L) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Fouriers Lösungsformel besagt in diesem Fall, dass Zahlen $C_n \in \mathbb{C}$ existieren, für die mit $\omega_n := \ldots$ folgt, dass
   $$\psi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-i\omega_n t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ für alle } (t,x) \in \mathbb{R} \times [0,L]. \tag{2}$$
   (a) (2P) Wie ist ω_n zu wählen, damit jeder einzelne Summand in (2) Lösung von (1) ist?
   (b) (2P) Für welche Wahl der C_n gilt $\psi(0,x) = \sin^3(\pi x/L) = \left[\frac{e^{i\pi x/L} - e^{-i\pi x/L}}{2i}\right]^3 = \ldots$?

4. (4P) Eine C^2-Funktion $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\psi(t,x) = e^{-i\omega t} g(r(x))\, h(\varphi(x))$ auf dem Def-bereich der Polarkoodinaten r, φ in $\mathbb{R}^2$ erfülle
   $$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi. \tag{3}$$
   Dabei wird $\hbar, m, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ vorausgesetzt und, dass $\psi \neq 0$. Die Funktionen g und h sind $\mathbb{C}$-wertig.
   (a) (1P) Welchen Def-bereich hat g bzw h? Schließen Sie aus (3), dass
   $$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\left[g(r)\, h(\varphi)\right] = \hbar\omega\left[g(r)\, h(\varphi)\right]. \tag{4}$$
   (b) (2P) Schließen Sie mit $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2$ aus (4), dass eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, für die
   $$h'' + \lambda \cdot h = 0.$$
   (c) (1P) Welche gewöhnliche DiffGl erfüllt g, wenn $h'' + \lambda \cdot h = 0$?

Lösung:

1. (a) Es gilt wegen $\dot{\gamma}(t) = (\pi + i\alpha) =: v_0$ und $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$

$$\int_\gamma \overline{f(z)} dz = \int_0^1 \overline{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = |v_0|^2 \int_0^1 t dt = \frac{|v_0|^2}{2} = \frac{\pi^2 + \alpha^2}{2}.$$

   (b) Wegen $\cos(z) = \sin'(z)$ gilt

$$\begin{aligned} i \int_\gamma \cos(z)\, dz &= i \sin(z)|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = i \sin(z)|_0^{v_0} = i \sin(v_0) \\ &= \frac{e^{iv_0} - e^{-iv_0}}{2} = \frac{e^{i(\pi+i\alpha)} - e^{-i(\pi+i\alpha)}}{2} \\ &= -\frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2} = \sinh(\alpha). \end{aligned}$$

2. Nach der F-Lösungsformel gilt

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = A(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Koeffizientenvergleich ergibt somit $A_2 = 1$ und $A_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus 2$. Weiter gilt

$$\omega_3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) = \partial_t A(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Daraus folgt $B_3 = 1$ und $B_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus 3$.

Die Frequenzen erfüllen $\omega_n = cn\pi/L$.

3. (a) Setze den n-ten Summanden in die SG ein. Dies ergibt für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times (0,L)$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\right] e^{-i\omega_n t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= \left[\hbar\omega_n - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] e^{-i\omega_n t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

   Daraus folgt, dass

$$\omega_n = \frac{\hbar}{2m} \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

   (b) F's Lösungsformel impliziert, dass

$$\sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \psi(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

   für alle $x \in [0,L]$. Es gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin^3(\alpha) &= \frac{\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)^3}{-8i} = \frac{e^{3i\alpha} - e^{-3i\alpha} - 3e^{2i\alpha}e^{-i\alpha} + 3e^{i\alpha}e^{-2i\alpha}}{-4 \cdot 2i} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot [\sin(3\alpha) - 3\sin(\alpha)]. \end{aligned}$$

   Somit folgt aus F's Lösungsformel für alle $x \in [0,L]$

$$\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(3\frac{\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

   Koeffizientenvergleich ergibt, dass $C_1 = 3/4$ und $C_3 = -1/4$ und $C_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$.

4. (a) Aus der SG folgt für alle $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$$0 = \left[i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta \right] e^{-i\omega t}\psi(0, x) = e^{-i\omega t}\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta \right] \psi(0, x).$$

Daraus folgt mit $\psi(0, x) = g(r(x))\, h(\varphi(x))$

$$\left[\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta \right] g(r)\, h(\varphi) = 0,$$

also die Behauptung. Der Def-bereich von g ist $\mathbb{R}_{>0}$ und jener von h ist $(0, 2\pi)$.

(b) Mit $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2$ folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\Delta + \frac{2m\omega}{\hbar} \right] g(r)\, h(\varphi) \\ &= \left[g''(r)\, h(\varphi) + \frac{1}{r} g'(r)\, h(\varphi) + \frac{1}{r^2} g(r)\, h''(\varphi) + \frac{2m\omega}{\hbar} g(r)\, h(\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $r^2/g(r)\, h(\varphi)$ ergibt (cum grano salis)

$$r^2 \frac{g''(r)}{g(r)} + r\frac{g'(r)}{g(r)} + \frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} + \frac{2m\omega}{\hbar} r^2 = 0.$$

Es existiert somit eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass

$$\begin{aligned} \lambda &= r^2 \frac{g''(r)}{g(r)} + r\frac{g'(r)}{g(r)} + \frac{2m\omega}{\hbar} r^2, \\ \lambda &= -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}, \end{aligned}$$

oder äquivalent dazu:

$$\begin{aligned} h''(\varphi) + \lambda h(\varphi) &= 0, \\ g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \left[\frac{2m\omega}{\hbar} - \frac{\lambda}{r^2} \right] g(r) &= 0. \end{aligned}$$

(c) Die DG ist in b) schon abzulesen:

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \left[\frac{2m\omega}{\hbar} - \frac{\lambda}{r^2} \right] g(r) = 0.$$