Die Differentialgleichung von Bessel

1. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha \sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ mit $c_0 \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Für y gelte Bessels DG

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y(x) = 0 \text{ für alle } x > 0.$$

(a) Leiten Sie daraus die folgenden Gleichungen für die Koeffizienten c_k der Potenzreihe ab:

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 - m^2\right) c_0 &= 0, \\ \left((\alpha+1)^2 - m^2\right) c_1 &= 0, \\ \left((\alpha+k)^2 - m^2\right) c_k + c_{k-2} &= 0 \text{ für alle } k \in \{2,3,4,\ldots\}. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Lösung $\alpha = -m$ der ersten Bedingung durch Einsetzen in die dritte den Widerspruch $c_0 = 0$ erzeugt. Also bleibt nur die Möglichkeit $\alpha = m$. Schließen Sie nun in diesem Fall, dass $c_1 = 0$ gelten muss. Zeigen Sie weiters mittels der dritten Bedingung, dass $0 = c_1 = c_3 = c_5 = \ldots$ folgt. Es bleibt somit nur noch die Rückführung der gerade indizierten Koeffizienten c_{2k} auf c_0 zu ermitteln. Zeigen Sie zunächst, dass

$$c_{2k} = -\frac{c_{2(k-1)}}{4k(k+m)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

(c) Jeder gerade indizierte Koeffizient c_k ist somit durch seinen Vorgänger festgelegt. Für die ersten drei Koeffizienten ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} c_2 &= \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{1\cdot(1+m)} c_0, \\ c_4 &= \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{2\cdot(2+m)} c_2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2\cdot 1\cdot(2+m)\cdot(1+m)} c_0, \\ c_6 &= \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{3\cdot(3+m)} c_4 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(3+m)\cdot(2+m)\cdot(1+m)} c_0. \end{aligned}$$

(d) Es ist daher zu erraten, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$c_{2k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{m!}{k!\,(k+m)!} c_0$$

gilt. Verifizieren Sie diese Vermutung durch Einsetzen in Gleichung (1). Es gilt also[1]

$$y(x) = c_0 x^m \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{m!}{k!\,(m+k)!} = \left(c_0 2^m m!\right) \cdot J_m(x).$$

2. Sei $\nu^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ gelte auf $\mathbb{R}_{>0}$ Bessels DG

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass für $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \sqrt{x} \cdot y(x)$ für alle $x > 0$

$$u''(x) + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) u(x) = 0.$$

Für große x nähert sich $x \mapsto \sqrt{x} \cdot y(x)$ daher einer Linearkombination von sin und cos.

[1] Für $\nu \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist definiert: $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} (x/2)^{2k+\nu}$.

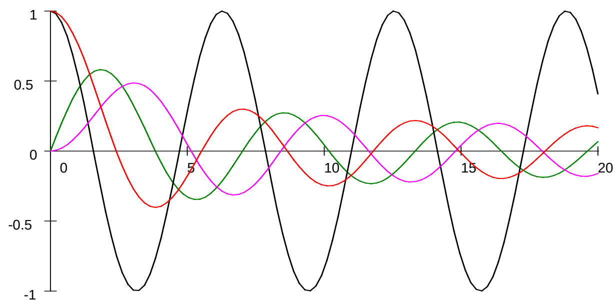

Figure 1: Die Besselfunktionen J_m für $m = 0, 1, 2$ und cos

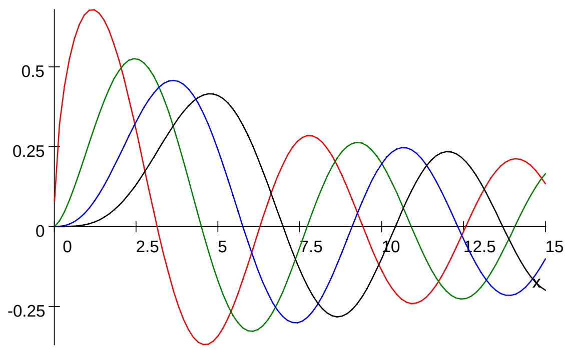

Figure 2: Die Besselfunktionen $J_{l+1/2}$ für $l = 0, 1, 2, 3$ in rot, grün, blau, schwarz

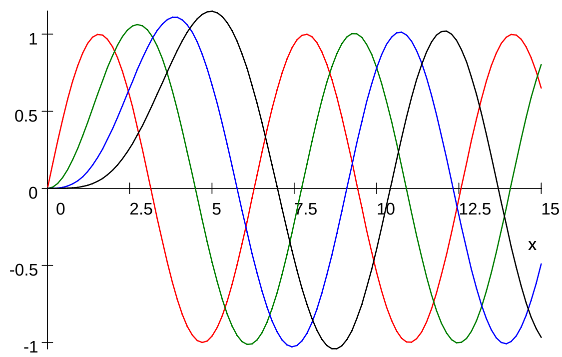

Figure 3: Die Funktionen $x \mapsto \sqrt{\frac{x\pi}{2}} J_{l+1/2}(x)$ für $l = 0, 1, 2, 3$ in rot, grün, blau, schwarz