Anregung und Auslöschung von Wellen durch eine Quelle: symmetrische Sonderfälle

1. Zur Auffrischung: Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}$, mit $x \mapsto f(|x|)/|x|$.
   Zeigen Sie: $(\Delta\phi)(x) = f''(|x|)/|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$.

2. Sei $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : \mathbb{R})$ und $A : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3 \setminus 0) \to \mathbb{R}$ mit $A(t,x) = \psi(t,|x|)/|x|$. Zeigen Sie, dass $\Box A = 0$ genau dann auf $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$, wenn $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_r^2\right)\psi = 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Zu einer Lösung A existieren also zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, sodass $A = A_{f,g}$ mit

$$A_{f,g}(t,x) := \frac{1}{|x|}\left[f(|x| - ct) + g(|x| + ct)\right]$$

   für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$.

   Zeigen Sie: a) Die Lösungen $A_{f,0}$ (resp. $A_{0,g}$) laufen von der Singularität $x = 0$ weg (resp. auf die Singularität zu). b) I.A. hat $A_{f,g}$ keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$ und ergibt daher *keine* Lösung von $\Box A = 0$ auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

   Die Figur 1 zeigt $x \mapsto A_{f,0}(t,x,0,0)$ mit $f(x) = 1/(1 + x^2)$ für $t \in \{-2,0,2,4,6,8\}$ im Bereich $1 < x < 15$. Ein physikalisches Bild: Am Ort 0 sitzt eine zeitabhängige, drehinvariante Punktquelle, die im Fall von $A_{f,0}$ im anfänglich ruhende Medium eine Welle anregt. Im Fall von $A_{0,g}$ wird das anfänglich schwingende Medium von der Quelle ruhiggestellt bzw. die einlaufende Welle wird ausgelöscht. Im allgemeinen Fall von $A_{f,g}$ läuft g auf die Quelle zu, wird von dieser gelöscht und durch das auslaufende f ersetzt. Eine formelmäßige Präzisierung der Quelle j ist erst mit den Mitteln der Distributionentheorie möglich.

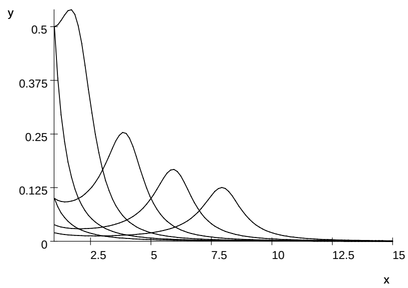

Figure 1: Momentaufnahmen einer auslaufenden Kugelwelle

3. Zeigen Sie: Hat f die Periode L, dann hat die Abbildung $t \mapsto A_{f,0}(t,x)$ von Beispiel 2) die Periode $T = L/c$. Bestimmen Sie für $A_{f,0}$ mit $f(x) = \sin(kx)$ und $k \in \mathbb{R}_{>0}$ die gesamte Energie, die während einer (zeitlichen) Periode durch eine Kugeloberfläche mit Radius R und Mittelpunkt 0 abströmt. Wie groß ist das Periodenmittel der Strahlungsleistung? Hängt es von R ab?

4. Statisch belastete Trommelmembran[1]: Sei $j(t,x) = -1$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \le R$. Diese Quelle ist also dreh- und zeittranslationsinvariant[2]. Ansatz: Es gebe eine C^2-Funktion $g : [0,R] \to \mathbb{R}$, sodass $A(t,x) = g(|x|)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ mit $|x| \le R$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\Box A = j$ mit der drehinvarianten und statischen Randvorgabe $A(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R \in \mathbb{R}_{>0}$ genau dann gilt[3], wenn $g(r) = (r^2 - R^2)/4$. Siehe Figur 2

[1] Es ist dies ein Beispiel für ein statisches Randwertproblem. Es sagt im Rahmen der Elastomechanik, dass eine statisch und gleichmäßig belastete Kreismembran die Form eines Rotationsparaboloids annimmt. Spannen Sie eine Frischhaltefolie straff über ein mit Wasser halb gefülltes Glas, erhitzen Sie es in der Mikrowelle und warten Sie die Abkühlung ab.
[2] Statt 'zeittranslationsinvariant' sagt man auch 'statisch'.
[3] Diese Randvorgabe ist somit statisch und drehinvariant.

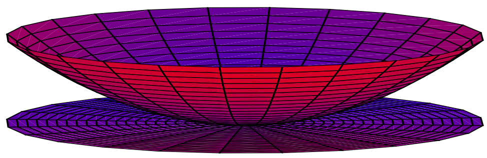

Figure 2: Kreismembran, statisch und gleichförmig belastet

(b) Welche Lösung A erfüllt die inhomogene statische Randvorgabe $A(t,x) = C\cos\left(l\varphi\left(x\right)\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = R$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \in \mathbb{R}$? Hinweis: Addieren Sie eine Lösung von $\Box A = 0$, welche die inhomogene Randvorgabe erfüllt. Blicken Sie zurück auf Bsp. 1e von Blatt 10. Die Figur 3 zeigt die Lösung für $C = 1/4$ und $l = 4$.

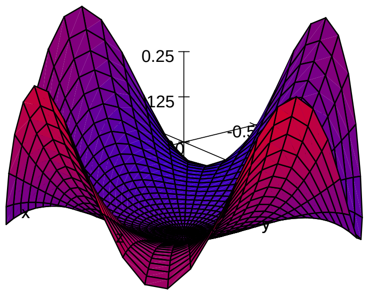

Figure 3: Statisch belastete Membran mit gewellter Randaufhängung