Besuch im Zoo mit Laplace, Schrödinger und d'Alembert

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und L_Ω sei die Menge aller $\mathcal{C}^2$-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$. Wir betrachten nun einige Spezialfälle von Definitionsbereichen Ω. Die Translations- bzw. Drehinvarianz von Δ und Ω legt dann die folgenden 'invarianten' Ansätze für $u \in L_\Omega$ nahe.

   (a) $\Omega = \mathbb{R}^2$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x,y) = f(x)$ für alle $(x,y) \in \Omega$ gilt. (In y-Richtung translationsinvariante Lösung)

   (b) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus 0$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ für alle $(x,y) \in \Omega$ gilt. (Um 0 drehinvariante Lösung)

   (c) $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus 0$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ für alle $(x,y,z) \in \Omega$ gilt.

   (d) $\Omega = \mathbb{R}^2$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ für alle $(x,y) \in \Omega \setminus 0$ gilt.

   (e) $\Omega = \mathbb{R}^2$: Geben Sie die Menge aller $u \in L_\Omega$ an, für die eine reelle Zahl l und eine Funktion $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass $u = r^l f(\varphi)$ auf dem Kartenbereich U der Polarkoordinaten (r,φ) gilt. Hinweis: Die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Abbildung $P : z \mapsto z^l$ hat nach Cauchy & Riemann harmonischen Real- und Imaginärteil. Welche Kartenausdrucke haben $P, \Re P$ und $\Im P$ in Polarkoordinaten? Geben Sie den kartesischen Kartenausdruck von u zu $u|_U = r^l \cos(l\varphi)$ und zu $u|_U = r^l \sin(l\varphi)$ für $l = 1,2,3$ an und kontrollieren Sie an diesem $\Delta u = 0$.

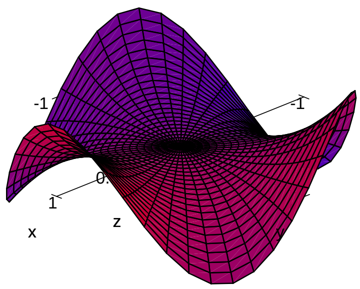

Figure 1: Polarplot von $r^3 \cos(3\varphi)$

2. $\phi \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{C}\right)$ heißt Lösung der freien, parameterreduzierten, 2d-Schrödingergleichung, falls

$$i\partial_t \phi(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \phi(t,x) \text{ für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

   Sei $k \in \mathbb{R}$ und $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\phi(t,x) = f(t)\exp(ikx)$ für ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann (1) löst, wenn ein $A \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $f(t) = A\exp\left(-i\frac{k^2}{2}t\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\Re\phi$ und $\Im\phi$ für $A = 1$. (Siehe Figur 2) In welche Richtung verschiebt sich der Graph von $x \mapsto \phi(t,x)$ mit wachsendem t? Welche Phasengeschwindigkeit hat ϕ?

3. Seien $c, k \in \mathbb{R}_{>0}$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto f(t)\sin(kx)$ mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Sei L_k die Menge aller solchen Funktionen A, für die überdies $\Box A = 0$.

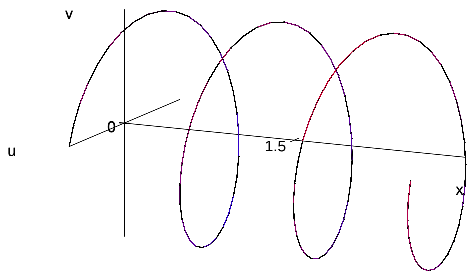

Figure 2: Die Funktion $x \mapsto \phi(0, x)$ für $k = 2\pi$.

(a) Bestimmen Sie L_k. Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$A_{a,b}(t, x) := (a \cos(ckt) + b \sin(ckt)) \sin(kx)$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Figur 3 zeigt $x \mapsto A_{1,0}(t, x)$ für $k = 1 = c$ zu den Zeiten $t \in \left\{0, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \pi\right\}$.

(b) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = \sin(kx)$ und $\partial_t A(0, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Lösung: $A(t, x) = \cos(ckt) \sin(kx)$.

(c) Für welche $A \in L_k$ gilt $A(0, x) = 0$ und $\partial_t A(0, x) = \frac{1}{\tau} \sin(kx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Hier ist $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Lösung: $A(t, x) = \frac{1}{ck\tau} \sin(ckt) \sin(kx)$.

(d) Wie muss f gewählt werden, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $(kx)^3$ ersetzt wird? Lösung: $f = 0$.

(e) Wie lautet L_k, wenn in der Problemstellung $\sin(kx)$ durch $\exp(kx)$ ersetzt wird? Lösung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A_{a,b}(t, x) := (a \exp(ckt) + b \exp(-ckt)) \exp(kx)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $L_k = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

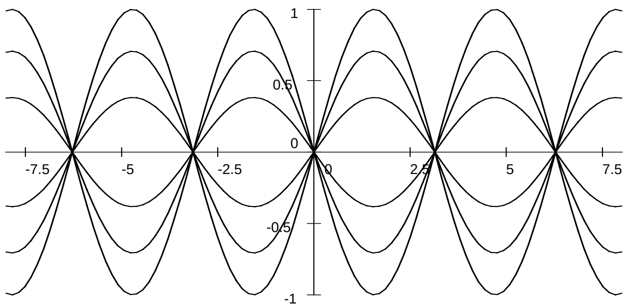

Figure 3: Schnappschüsse einer stehenden Welle

4. Kontrollieren Sie für $A \in L_k$ von Beispiel 3a) oder 3e) d'Alembert's Lösungsformel

$$A(t, x) = \frac{1}{2} \{u(x + ct) + u(x - ct)\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(\xi) d\xi.$$

Sie drückt *jede* $\mathcal{C}^2$-Lösung der Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ durch ihre Anfangswerte $A(0, x) = u(x)$ und $\partial_t A(0, x) = v(x)$ aus. Es gilt dabei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Geben Sie die Zerlegung von $A \in L_k$ in einen links- und einen rechtsläufigen Anteil an.