Niveaumengen, Gradient, Kartenwechsel, Gramsche Matrix

1. Skizzieren Sie zu den Punkten $p \in S = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (1,-1)\}$ die Niveaumengen $N_p[f]$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Kontrollieren Sie, ob $grad_p[f]$ in den regulären Punkten von S senkrecht auf die Tangente von $N_p[f]$ im Punkt p steht. Wählen Sie im $\mathbb{R}^2$ das Standardskalarprodukt und:

   (a) $f(x,y) = x$,
   (b) $f(x,y) = x + y$,
   (c) $f(x,y) = x - y$,
   (d) $f(x,y) = x^2 + y^2$,
   (e) $f(x,y) = x^2 - y^2$,
   (f) $f(x,y) = xy$.

2. Sei V ein Vektorraum und die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ sei ein Skalarprodukt. Für ein fest gewähltes $k \in V \setminus 0$ sei $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(v) = \sin\langle k, v\rangle$. Bestimmen Sie die Niveaumenge N_v von f zu einem fest gewählten Punkt $v \in V$. Zeigen Sie, dass $grad_v(f) = [\cos\langle k, v\rangle] \cdot k$. Kontrollieren Sie $\langle grad_v(f), t_v\rangle = 0$ für jeden Tangentenvektor t_v an N_v im Punkt v.

3. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$. Für die Standardbasis $\underline{e} = (e_1, e_2)$ gilt $e_1 = (1,0)^t$, $e_2 = (0,1)^t$. Zwei weitere Basen $\underline{f} = (f_1, f_2)$ und $\underline{g} = (g_1, g_2)$ sind durch

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2,\ f_2 = e_2, \\ g_1 &= e_1 + e_2,\ g_2 = e_2 - e_1 \end{aligned}$$

gegeben. Sei $\Phi_{\underline{e}} = \left(\phi^1_{\underline{e}}, \phi^2_{\underline{e}}\right)^t = (x,y)^t$ die kontravariante Karte zur Basis $\underline{e}$, d.h. es gilt $id_V = \underline{e} \cdot \Phi_{\underline{e}}$. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist auch $\psi : V \to \mathbb{R}$ mit $\psi = h \circ (y - x)$ differenzierbar. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jenes Skalarprodukt, für das $\underline{e}$ eine ONB ist.

   (a) Zeigen Sie für die zu den Basen $\underline{f}$ und $\underline{g}$ gehörigen kontravarianten Karten $\Phi_{\underline{f}}$ und $\Phi_{\underline{g}}$

$$\Phi_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Phi_{\underline{e}} \text{ und } \Phi_{\underline{g}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \Phi_{\underline{e}},$$

   und für die zu $\underline{f}$ und $\underline{g}$ gehörigen Gramschen Matrizen

$$G_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } G_{\underline{g}} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Skizzieren Sie einige Koordinatenlinien der drei Karten. Wie sieht die Niveaumenge von ψ zum Punkt $e_1 + 2e_2$ in der Nähe dieses Punktes aus?

   (b) Zeigen Sie für die partiellen Ableitungen von ψ

$$\begin{aligned} \partial_1^{\underline{e}}\psi &= -h'(y-x) = -\partial_2^{\underline{e}}\psi, \\ \partial_1^{\underline{f}}\psi &= 0,\ \partial_2^{\underline{f}}\psi = h'(y-x), \\ \partial_1^{\underline{g}}\psi &= 0,\ \partial_2^{\underline{g}}\psi = 2h'(y-x). \end{aligned}$$

   Beachten Sie: Trotz $\phi^1_{\underline{e}} = \phi^1_{\underline{f}}$, gilt $\partial_1^{\underline{f}}\psi \neq \partial_1^{\underline{e}}\psi$.

   (c) Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld von ψ mit der Entwicklungsformel nach einer beliebigen Basis mit den drei Basen $\underline{e}, \underline{f}$ und $\underline{g}$. Kontrollieren Sie, dass die drei Rechnungen übereinstimmend auf $grad(\psi) = [h'(y-x)] \cdot (e_2 - e_1)$ führen.

   (d) Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld von ψ bezüglich jenes Skalarproduktes, zu dem $\underline{f}$ eine ONB ist. Lösung: $\widetilde{grad}(\psi) = h'(y-x)\, e_2$. Wie kann $\widetilde{grad}(\psi)$ 'senkrecht' auf die Niveaulinien von ψ stehen, wenn dies auch $grad(\psi)$ tut?