Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 14, 30. Jänner 2017

Anfangsrandwertaufgaben: schwingende Saite und statisch deformierte Rechtecksmembran

1. *Schwingende, am Rand eingespannte Saite:* Bestimmen Sie aus Fouriers Lösungsformel die Funktion $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times (0, L) : \mathbb{R}\right)$, für die (i), (ii) und (iii) gilt.

   (i) d'Alemberts WG: $\Box A = 0$

   (ii) homogene Dirichlet'schen Randbedingung: $\lim_{x\downarrow 0} A\,(t,x) = lim_{x\uparrow L} A\,(t,x) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

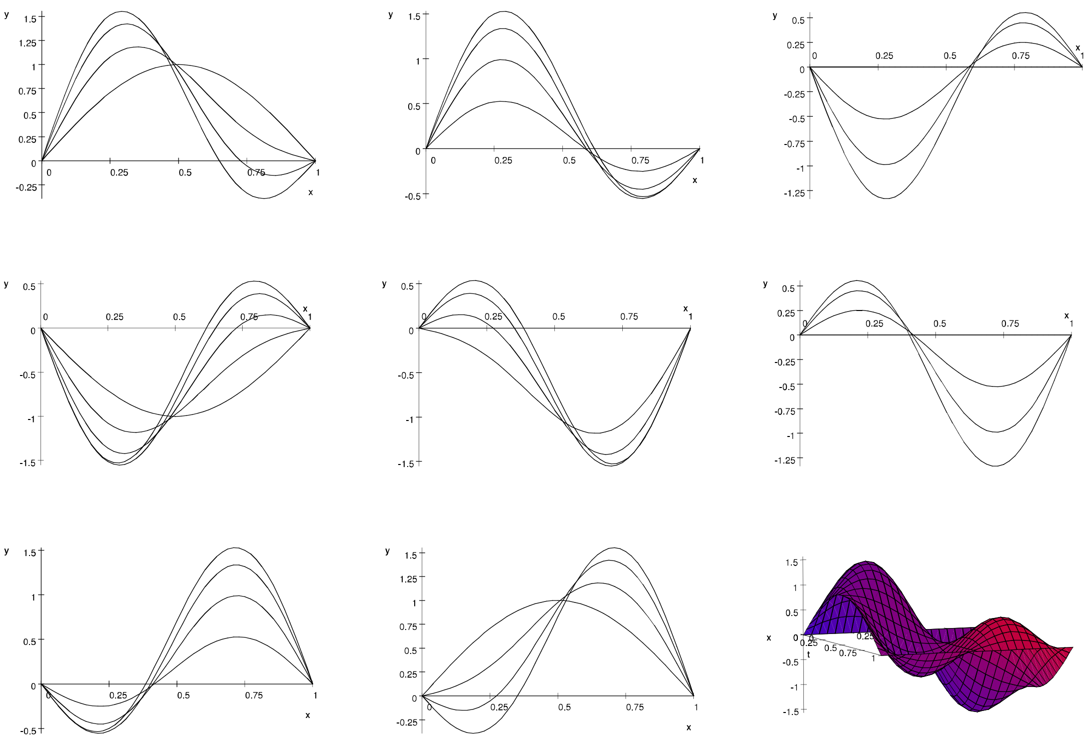
   (iii) Anfangsvorgabe: $A(0,x) = aL \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$, $\quad \partial_t A(0,x) = 2\pi bc \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$ für alle $x \in (0,L)$; mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$

   Beachten Sie, dass $lim_{x\downarrow 0} v\,(x) = lim_{x\uparrow L} v\,(x) = 0$ und $\lim_{x\downarrow 0} u''\,(x) = lim_{x\uparrow L} u''\,(x) = 0$. Warum ist das von Bedeutung? *Lösung:*

   $$A(t,x) = L\left\{a \cos\left(\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + b \sin\left(2\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)\right\}.$$

   Ist für festes x die Abbildung $t \mapsto A\,(t,x)$ periodisch? Falls ja, hängt die kleinste Periode von x ab?

   Hier sind der 3d-Graph und einige Momentaufnahmen der Schwingung A/L für $ct/L = n/16$ für $n = 0, 1, 2, \ldots 32$ und für $a = b = 1$. Suchen Sie die Web-Seite http://www.falstad.com/loadedstring/ auf. Dort können Sie der Lösung *lauschen!*



2. Zeigen Sie: Wird in Bsp 1 die Anfangsvorgabe (iii) durch $A(0,x) = \sin^3\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$ für alle $x \in (0,L)$ ersetzt, dann folgt aus Fouriers Lösungsformel

   $$4 \cdot A\,(t,x) = 3 \cos\left(\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) - \cos\left(3\pi \frac{ct}{L}\right) \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right).$$

   Lässt sich die Saitenschwingung zur Anfangsvorgabe $A(0,x) = \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$ für alle $x \in (0,L)$ auch so einfach lösen? Wo liegt das Hindernis?

3. *Harmonische Funktion am Rechteck mit Dirichletscher Randvorgabe*[1]*:* Sei $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $u\,|_R \in \mathcal{C}^2\left(R : \mathbb{R}\right)$ mit $R := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < L_1 \text{ und } 0 < y < L_2\right\}$. Auf R gelte $\Delta u = 0$ und auf ∂R die Randvorgabe: $u\left(x, L_2\right) = \sin\left(\pi \frac{x}{L_1}\right), u(x, 0) = u(0, y) = u(L_1, y) = 0$.

   Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \overline{R}$ gilt

$$u(x, y) = \frac{\sin\left(\pi x / L_1\right) \sinh\left(\pi y / L_1\right)}{\sinh\left(\pi L_2 / L_1\right)}.$$

   Können Sie u zu einer harmonischen Funktion auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen? Hat u in R ein Minimum?

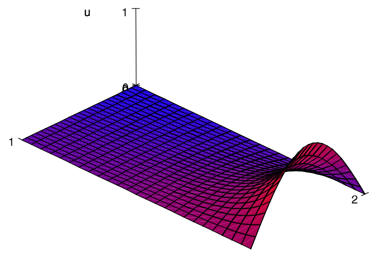


Figure 1: u von Bsp 3 für $L_1 = 1$ und $L_2 = 2$

4. *Vollständige Separation von $\Box A = 0$ in Polarkoordinaten:* Für $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right) \setminus 0$ gelte für alle (t, x) mit x im Definitionsbereich der Polarkoordinaten (r, φ)

$$A\left(t, x\right) = f\left(t\right) h\left(r\left(x\right)\right) B\left(\varphi\left(x\right)\right).$$

   Zeigen Sie, dass aus $\Box A = 0$ folgt, dass Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren, für die

$$\begin{aligned} f'' + c^2 \lambda f &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}, \\ B'' + m^2 B &= 0 \text{ auf } \left(0, 2\pi\right), \\ h''\left(r\right) + \frac{1}{r} h'\left(r\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right) h\left(r\right) &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

[1] Die Funktion u beschreibt einerseits das elektrische Potential in einem (unendlich langen) Hohlraum mit konstantem rechteckigen Querschnitt und entsprechend vorgegebenem Potential auf der (inneren) Oberfläche des Rechteckzylinders. Andererseits gibt u die Form einer elastischen Membran an, die an den vorgegebenen Rand geheftet ist. Sie hat den kleinsten Flächeninhalt unter allen d'baren Flächen vorgegebenen Randes.