Name:..Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter inkl Angabeblatt...................

Zweite Klausur *Begründen Sie Ihre Ergebnisse nachvollziehbar!*

1. (6P) Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -1$ an.
2. (6P) Ist $\sqrt{\cdot}$ die Hauptzweig(quadrat)wurzel, dann gilt für $\varepsilon > 0$
$$\begin{aligned} \sqrt{-4+i\varepsilon} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sqrt{-4-i\varepsilon} &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$
3. (4P) $(-i)^i = \ldots\ldots\ldots\ldots$
4. (4P) Die Funktion $\tan z = \sin z / \cos z$ hat in $\pi/2$ einen Pol der Ordnung ....
5. (6P) Geben Sie den Wert des Residuums von $f(z) = \tan z$ im Punkt $z = \pi/2$ an:
$$Res_{\pi/2}(f) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
6. (8P) Bestimmen Sie die Menge M aller Funktionen $u = f \circ L$ mit $\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$, wobei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear ist.
7. (6P) Bestimmen Sie $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\left(c^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right) A(t,x) = 0$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ und mit $A(0,x) = e^{-x^2}$ und $\partial_t A(0,x) = -2cxe^{-x^2}$. Hat A eine bestimmte Laufrichtung? Wenn ja, welche?

Lösung:

1) Eine Lösung ist $z_1 = -1$. Die weiteren erhält man daraus durch Multiplikation von z_1 mit den dritten Einheitswurzeln $e^{i2\pi/3}$ und $e^{-i2\pi/3}$. Also gilt

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow z \in \left\{-e^{i2\pi/3}, -e^{-i2\pi/3}, -1\right\} = \left\{e^{-i\pi/3}, e^{i\pi/3}, e^{i\pi}\right\}.$$

2) Für $\varepsilon > 0$ gilt: $|-4 \pm i\varepsilon| = \sqrt{16+\varepsilon^2}$ und $\arg(-4 \pm i\varepsilon) = \pm\left(\pi - \arctan\frac{\varepsilon}{4}\right)$. Daher gilt

$$\sqrt{-4 \pm i\varepsilon} = \sqrt[4]{16+\varepsilon^2} \cdot e^{\pm i \frac{\pi - \arctan\frac{\varepsilon}{4}}{2}} \to 2 \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm 2i.$$

3) Es gilt

$$(-i)^i = \left(e^{-i\pi/2}\right)^i = e^{-ii\pi/2} = e^{\pi/2} = \sqrt{e^\pi}.$$

4) Es gilt $\tan z = \sin z / \cos z$. Der Nenner hat eine Nullstelle in $\pi/2$. Diese Nullstelle ist einfach, denn es gilt $\cos'(z) = -\sin z$ und somit $\cos'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$. Es gilt also die Taylorreihenentwicklung

$$\cos z = \cos'(\pi/2)\left[z - \frac{\pi}{2}\right] + o\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Der Pol hat somit die Ordnung 1.

5) Es gilt nach Bsp 1) von Blatt 10)

$$Res_{\pi/2}(f) = \lim_{z\to\pi/2}(z - \pi/2)\left[\frac{\sin z}{\cos z}\right] = 1 \cdot \lim_{z\to\pi/2}\left[(z-\pi/2)\frac{1}{\cos z}\right] = -1.$$

6) Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existieren Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $L(t,x) = at + bx$. Für $u(t,x) = f(at+bx)$ folgt

$$\partial_t u(t,x) = f'(at+bx) \cdot a \text{ und } \partial_x^2 u(t,x) = f''(at+bx) \cdot b^2.$$

Somit ist $\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$ genau dann erfüllt, wenn

$$f'(at+bx) \cdot a = f''(at+bx) \cdot b^2.$$

Für $g = f'$ und $b \neq 0$ gilt somit die DG erster Ordnung $g'(s) = \left(a/b^2\right) g(s)$. Daraus folgt $g(s) = ce^{\frac{a}{b^2}s}$ und weiter mit $C, D \in \mathbb{R}$

$$f(s) = Ce^{\frac{a}{b^2}s} + D.$$

Für u folgt daher

$$u(t,x) = f(at+bx) = Ce^{\frac{a}{b^2}(at+bx)} + D = Ce^{\left(\frac{a}{b}\right)^2 t} e^{\frac{a}{b}x} + D.$$

Im Fall $b = 0$ und $a \neq 0$ ist $\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$ genau dann erfüllt, wenn $f' = 0$. Dies ergibt die konstanten Lösungen, also $u(t,x) = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Zusammenfassend gilt: Die Menge M aller $\mathcal{C}^2$-Lösungen von $\partial_t u = \partial_x^2 u$, die als Hintereinanderausführung $f \circ L$ einer Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und einer linearen Funktion $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu erhalten sind, erfüllt

$$M = \{C \cdot u_k + D \,|\, C, D, k \in \mathbb{R}\} \text{ mit } u_k(t,x) = e^{k^2 t} e^{kx} \text{ für } t, x \in \mathbb{R}.$$

7) d'Alemberts Lösungsformel ergibt

$$\begin{aligned} A(t,x) &= \frac{e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x+ct)^2}}{2} + \frac{-c}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} 2\xi e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x+ct)^2}}{2} - \frac{e^{-(x+ct)^2} - e^{-(x-ct)^2}}{2} \\ &= e^{-(x+ct)^2}. \end{aligned}$$

A ist linksläufig.