Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 12, 16. Jänner 2017

---

d'Alemberts Lösungsformel; resonante Wellenanregung

1. Ermitteln Sie über d'Alemberts Lösungsformel die Funktion $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = 0$ zu den Anfangsvorgaben:

   (a) $A(0,x) = \sin(kx+\delta)$ und $\partial_t A(0,x) = 0$ auf $\mathbb{R}$ für $k, \delta \in \mathbb{R}$. *Lösung:* A ist eine Stehwelle und es gilt $A(t,x) = \cos(ckt)\sin(kx+\delta)$.

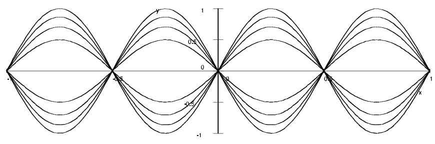

Figure 1: Momentaufnahmen von $\cos(ckt)\sin(kx)$

   (b) $A(0,x) = 0$ und $\partial_t A(0,x) = ac/\left(a^2+x^2\right)$ auf $\mathbb{R}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Ist A, siehe Fig 2 und 3, eine Stehwelle? *Lösung:* $A(t,x) = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x+ct}{a}\right) - \arctan\left(\frac{x-ct}{a}\right)\right]$.

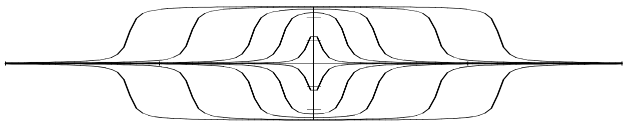

Figure 2: Momentaufnahmen $A(t,\cdot)$ aus Bsp 1b für $c\,|t|\,/a \in \{1,5,10,20,30\}$

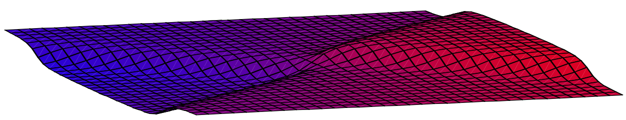

Figure 3: Graph der Lösung von Bsp 1b

2. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$. Für welche Funktionen $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Lösung A von $\Box A = 0$ zur Anfangsbedingung $(A(0,x), \partial_t A(0,x)) = (u,v)$ rechtsläufig? *Lösung: Genau dann, wenn* $v = -cu'$. In diesem Fall gilt $A(t,x) = u(x-ct)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine rechtsläufige Lösung von $\Box A = 0$ mit $\partial_t A(0,x) = ac/\left(a^2+x^2\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *Lösung:* $A(t,x) = -\arctan\left(\frac{x-ct}{a}\right)$. Siehe Fig 4.

3. Für die Funktion $j \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ gelte $\Box j = 0$. Geben Sie ein $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = j$ an. *Hinweis:* Für $j(t,x) = f(x-ct)$ suchen Sie A mit dem Ansatz $A(t,x) = (x+ct) \cdot F(x-ct)$. Ähnliches tun Sie für $j(t,x) = g(x+ct)$. Geben Sie die Menge L aller Funktionen $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A = j$ an. *Lösung:* $L = A_p + \ker \Box$ mit

$$A_p(t,x) = -\frac{1}{4}\left[(x+ct)\,F(x-ct) + (x-ct)\,G(x+ct)\right] \text{ und } j(t,x) = F'(x-ct) + G'(x+ct)\,.$$

   Anmerkung: Auch die Funktionen $\widetilde{A}_p, \widehat{A}_p \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit

$$\widetilde{A}_p(t,x) = -\frac{x}{2}\left[F(x-ct) + G(x+ct)\right] \text{ und } \widehat{A}_p(t,x) = -\frac{ct}{2}\left[F(x-ct) - G(x+ct)\right]$$

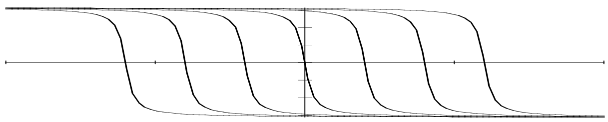

Figure 4: Momentaufnahmen von $-\arctan \frac{x-ct}{a}$

erfüllen $\Box A = j$, da $A_p - \widetilde{A}_p$ und $A_p - \widehat{A}_p$ (beinahe offensichtlich) in $\ker \Box$ liegen.

4. Seien $\omega, q \in \mathbb{R}_{>0}$. Geben Sie ein $A \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A(t,x) = \sin(\omega t)\sin(qx)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ an. *Hinweis:* Der Ansatz $A(t,x) = \sin(\omega t)\, g(x)$ liefert zB diese Stehwellenlösung:

$$A(t,x) = \sin(\omega t) \cdot \begin{cases} \frac{\sin(qx)}{q^2-k^2} & \text{für } q \neq \omega/c =: k \\ x\frac{\cos(qx)}{2q} & \text{für } q = k \end{cases} .$$

Vergleichen Sie im resonanten Fall $q = k$ diese Lösung A mit $\widetilde{A}_p$ aus Beispiel 3. Siehe Fig 5.

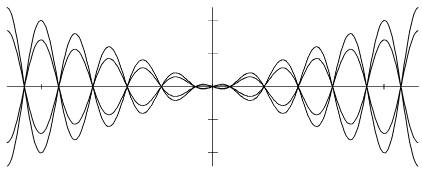

Figure 5: Momentaufnahmen der resonanten Stehwelle $\widetilde{A}_p$

Freiwilliger Zusatz: Ermitteln Sie $A_0 \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}\right)$ mit $\Box A_0(t,x) = \sin(\omega t)\sin(qx)$ und homogenen Anfangswerten $A_0(0,\cdot) = (\partial_t A_0)(0,\cdot) = 0$. *Lösung:*

$$A_0(t,x) = \sin(qx) \cdot \begin{cases} \frac{\sin(\omega t) - \frac{k}{q}\sin(cqt)}{q^2-k^2} & \text{für } q \neq k := \omega/c \\ \frac{\sin(\omega t) - \omega t\cos(\omega t)}{2q^2} & \text{für } q = k \end{cases} .$$

$A_{caus} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A_{caus}(t,\cdot) = 0$ für $t < 0$ und $A_{caus}(t,\cdot) = A_0(t,\cdot)$ für $t \geq 0$ beschreibt somit das Anregungsverhalten eines zu den Zeiten $t < 0$ ruhenden und kräftefreien Mediums durch eine ab $t = 0$ wirkende Kraft $\sin(\omega t)\sin(qx)$.

5. *Freiwillig.* Ein Lichtpaket[1]: Seien $a > 0, q > 0$ und $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $A(t,x) = f(x-ct)$, wobei $f(x) = a^4\cos(qx)/\left(a^4+x^4\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Funktion $C : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, für die

$$A(t,x) = \int_0^\infty C(k)\cos(k(x-ct))\,dk.$$

Hinweis: Berechnen Sie C über die Fouriertransformierte von f mittels Residuensatz.

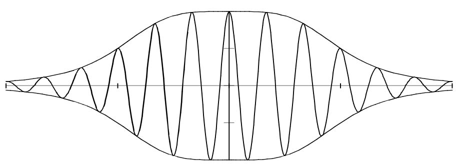

Figure 6: Das Wellenpaket f von Bsp 5 für $qa = 6\pi$

[1] Typische Werte für thermisch erzeugtes Licht sind $q = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^{-1}$ und $a = 1\,\mathrm{m}$.