Symmetrien einer PDG, Reduktion der PDG auf ODE durch invariante Lösungsansätze

1. *Verschiebungen:* Sei $V=\mathbb{R}^n$ mit dem SSP $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Gesucht sind $\mathcal{C}^2$-Lösungen einer PDG, die durch Komposition einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ mit einer linearen Abbildung $L:V\to\mathbb{R}$ bzw $L:\mathbb{R}\times V\to\mathbb{R}$ zu erhalten sind. Je nach Bedarf ist im Folgenden $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ gewählt. Eine solche Lösung $f\circ L$ ist unter Verschiebung um einen Vektor $a\in\ker L$ invariant[1], dh es gilt $(f\circ L)(v+a)=(f\circ L)(v)$ für alle v im Definitionsbereich von L.[2]

   (a) *Laplace:* Gesucht ist die Menge M aller $\mathcal{C}^2$-Funktionen $u:V\to\mathbb{R}$ mit $\Delta u=0$ und $u=f\circ L$ für ein $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und ein $L\in V^*$. *Hinweis:* $L=\langle k,\cdot\rangle$ mit $k\in V$. *Lösung:* $M=\{u=L+a:L\in V^*,a\in\mathbb{R}\}$. Geben Sie $\ker\langle k,\cdot\rangle$ an.

   (b) *d'Alembert:* Gesucht ist die Menge M aller $\mathcal{C}^2$-Funktionen $A:\mathbb{R}\times V\to\mathbb{R}$ mit $\Box A=0$ und $A=f\circ L$ für ein $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und ein $L\in(\mathbb{R}\times V)^*$. *Hinweis:* $L(t,x)=\omega t-\langle k,x\rangle$ für ein $k\in V$ und ein $\omega\in\mathbb{R}$. *Lösung:* $M=M_1\cup M_2$ mit

   $$M_1=\left\{A=L+a:L\in(\mathbb{R}\times V)^*,a\in\mathbb{R}\right\},\quad M_2=\left\{A=f\circ L_k:f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}:\mathbb{R}),k\in V\right\},$$

   wobei $L_k(t,x)=c\,|k|\,t-\langle k,x\rangle$ für alle $(t,x)\in\mathbb{R}\times V$ gilt. *Freiwillig:* Lesen Sie für $k\neq0$ an $\ker L_k$ die Phasengeschwindigkeit von $f\circ L_k$ ab.

   (c) *Schrödinger:* Bestimmen Sie die Menge M aller $\psi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times V:\mathbb{C})$ mit $i\hbar\partial_t\psi=-\left(\hbar^2/2m\right)\Delta\psi$ und $\psi=f\circ L$ für ein $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ und ein $L\in(\mathbb{R}\times V)^*$. *Hinweis:* $L(t,x)=\omega t-\langle k,x\rangle$ für ein $k\in V$ und ein $\omega\in\mathbb{R}$. *Lösung:* $M=\left\{\psi=ae^{-iL_k}+b:k\in V\text{ und }a,b\in\mathbb{C}\right\}$, wobei $L_k(t,x)=\hbar\,|k|^2\,t/(2m)-\langle k,x\rangle$ für alle $(t,x)\in\mathbb{R}\times V$ gilt. *Freiwillig:* Lesen Sie für $k\neq0$ an $\ker L_k$ die Phasengeschwindigkeit von e^{-iL_k} ab.

2. *Raumspiegelung:* Sind A_k bzw ψ_k für ein $k\in V$ die Lösungen von Bsp 1b) bzw 1c) mit $A_k(t,x)=\sin(c\,|k|\,t-\langle k,x\rangle)$ bzw $\psi_k(t,x)=e^{-i\hbar|k|^2t/2m}e^{i\langle k,x\rangle}$ dann sind auch $C=A_k+A_{-k}$ bzw $C=\psi_k+\psi_{-k}$ Lösungen der PDG aus 1b) bzw 1c). Zeigen Sie: $C(t,x)=2\sin(c\,|k|\,t)\cos(\langle k,x\rangle)$ bzw $C(t,x)=2e^{-i\hbar|k|^2t/2m}\cos\langle k,x\rangle$. Es ist also C eine raumspiegelungsinvariante Stehwelle, dh es gilt $C(t,x)=Z(t)\cdot R(x)$ und $C(t,-x)=C(t,x)$. Man sagt zu Letzterem: C hat gerade Parität.

3. *Drehungen:* Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ samt zugehöriger Norm $r\equiv|\cdot|$. Gesucht sind alle $\mathcal{C}^2$-Funktionen $u:V\setminus 0\to\mathbb{R}$ mit $\Delta u=0$ und $u=f\circ r$ für ein $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$.[3] *Lösung:* Alle Funktionen u mit $u=A/r+B$ mit $A,B\in\mathbb{R}$.

4. *Dehnungen:* Sei $u\in C^2\left(\mathbb{R}^2:\mathbb{R}\right)$ mit $\Delta u=0$ und $u(\lambda p)=u(p)$ für alle $p\in\mathbb{R}^2$ und alle $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass u konstant ist. *Hinweis:* Nutzen Sie Polarkoordinaten.

5. *Dehnungen (Freiwillig):* $\psi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}:\mathbb{C})$ erfülle für alle $(t,x)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$
   $\psi(t,x)=u\left(x/\sqrt{t}\right)$ für ein $u\in C^2(\mathbb{R}:\mathbb{C})$ und $i\partial_t\psi(t,x)=-\partial_x^2\psi(t,x)/2$ (SG)

   Zeigen Sie: Zu ψ existieren Zahlen $a,b\in\mathbb{C}$ mit $\psi(t,x)=a+b\cdot u\left(x/\sqrt{t}\right)$ für alle $(t,x)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ mit $u(x):=\int_0^x e^{is^2/2}ds$. Existiert ein ψ mit $\lim_{t\to0}\psi(t,x)=\pm1/2$ für $\pm x>0$? *Lösung:* Ja, das mit $a=0$ und $b=(1-i)/2\sqrt{\pi}$. Mit Fresnels Funktionen C und S erfüllt es

   $$\psi(t,x)=\Psi(t,x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int_0^{x/\sqrt{t}}e^{is^2/2}ds=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left[C\left(\frac{x}{\sqrt{\pi t}}\right)+iS\left(\frac{x}{\sqrt{\pi t}}\right)\right]=-\Psi(t,-x).$$

   Bemerkung: Ψ hat ungerade Parität. Die Funktion $K:\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit $K(t,x):=\partial_x\Psi(t,x)=\exp\left(ix^2/(2t)\right)/\sqrt{2\pi it}$ hat gerade Parität.[4]

---

[1] Die Verschiebung um ein beliebiges a führt (in unseren Beispielen) eine Lösung der PDG in eine andere Lösung derselben(!) PDG über. Die Verschiebungen werden daher als Symmetrien der PDG bezeichnet. Sind die beiden durch eine Verschiebung auseinander hervorgehenden Lösungen gleich, dann wird eine solche Verschiebung (hier um $a\in\ker L$) als eine Invarianz von $f\circ L$ bezeichnet. Analoges gilt für Drehungen und Dehnungen.

[2] Die Menge der linearen Abbildungen eines reellen Vektorraums W auf seinen Skalarkörper $\mathbb{R}$ wird mit W^* bezeichnet.

[3] Es gilt also $u\circ R=u$ für alle $R\in SO(V)$.

[4] K ist der Evolutionskern der 1d freien Schrödingergleichung.