Residuen; Komplexe Kurvenintegrale; Integration mittels Residuensatzes

1. Welche Nullstellenmenge hat cos in $\mathbb{C}$ und welches Residuum hat $1/\cos$ in $\pi/2$?

2. Sei $z_0 = k_0 + i\varepsilon$ für $\varepsilon, k_0 \in \mathbb{R}$ mit $k_0 > 0$. Die Funktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei das Polynom $P(z) = z^2 - z_0^2$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\} \to \mathbb{C}$ erfülle $f(z) = e^{ixz}/P(z)$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Koeffizienten c_{-1} der Laurentreihe von f um z_0, also das Residuum von f an der Stelle z_0, an. Gegen welchen Wert konvergiert c_{-1} für $\varepsilon \to 0$?

3. Sei $R > 0$ und $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + R$. Weiter sei $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R \cdot \exp(it)$. Die Kurve $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{C}$ mit
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$
parametrisiert daher einen in der oberen komplexen Halbebene liegenden Halbkreis um 0 (samt Durchmesser). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \frac{2R^3}{3}(2 - \alpha).$$
Beachten Sie: f ist holomorph $\Leftrightarrow \alpha = 2 \Leftrightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

4. *Laplace-Integrale:* Zeigen Sie für $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit dem Residuensatz, dass
$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{\pi}{2\varepsilon} e^{-\alpha\varepsilon} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\varepsilon}.$$
Hinweis: Die Integranden sind gerade holomorphe Funktionen mit den Polstellen $\pm i\varepsilon$. Nützen Sie das, um die Integration von $-\infty$ bis ∞ statt nur von 0 bis ∞ auszuführen. Schließen Sie dann noch den verlängerten Weg durch einen Halbkreisbogen in der richtigen Halbebene.

5. *Freiwillig:* Erschließen Sie aus der Fourierdarstellung (1) der Heavisidestufe
$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{0<\varepsilon\to 0} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}}{k - i\varepsilon} dk = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$
die Fourierdarstellung (2) der charakteristischen Funktion des Intervalls $[-L, L]$
$$\Theta(L - |x|) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(kL)}{k} \cos(kx)\, dk \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{L, -L\}. \tag{2}$$
Hinweis: Beachten Sie $\Theta(L - |x|) = \Theta(x + L) - \Theta(x - L)$. Überprüfen Sie Gl (2) mit Fouriers Umkehrsatz.