Potenzreihen; Gauß'sche Integralformel: Einige exakte Lösungen der freien Schrödingergleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{ für } \alpha \in \mathbb{C} \setminus 0 \text{ mit } \Re\alpha \geq 0 \text{ und Hauptzweigwurzel } \sqrt{\cdot}$$

1. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ den Konvergenzradius 1 hat, und dass
$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 1/(1-z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$
Gibt es ein z mit $|z| = 1$, sodass die Folge $(f_n(z))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert?

2. Sei $U = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0, \Re z \leq -1\}$ und $\phi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit
$$\phi(z,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(1+z)}}}{\sqrt{1+z}}, \qquad \text{wobei } \sqrt{\cdot} \text{ die Hauptzweigwurzel ist.}$$
   (a) Zeigen Sie $\partial_z \phi(z,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 \phi(z,x)$ für alle $(z,x) \in U \times \mathbb{R}$.
   (b) Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\psi(t,x) = \phi(it,x)$. Zeigen Sie $i\partial_t \psi(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \psi(t,x)$ und
$$\psi(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(1+it)}}}{\sqrt{1+it}} = \frac{e^{\frac{-x^2}{2(1+t^2)}}}{\sqrt[4]{1+t^2}} e^{\frac{itx^2}{2(1+t^2)}} e^{-i\arctan(t)/2}, \qquad |\psi(t,x)|^2 = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+t^2}}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

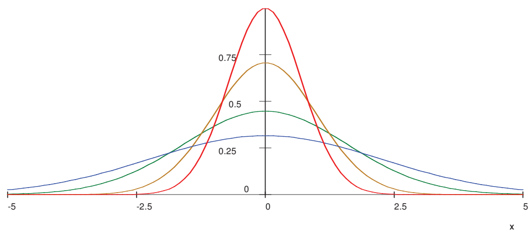

Figure 1: Die Abbildungen $x \mapsto |\psi(t,x)|^2$ für $|t| \in \{0,1,2,3\}$

   (c) Seien $a, m \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\Psi(t,x) := \psi(\tau,\xi)$ für $\tau = t\hbar/(ma^2)$ und $\xi = x/a$. Zeigen Sie $i\hbar\partial_t \Psi(t,x) = -(\hbar^2/(2m))\,\partial_x^2 \Psi(t,x)$. (Physikalisch dimensionierte freie SG)

3. Zeigen Sie für ψ aus Bsp 2b) und für $p \in \mathbb{R}_{>0}$
$$I_p(t) := \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t,x)|^{2p} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(1+t^2\right)^{\frac{1-p}{2}}.$$
Für welches $p \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Abbildung $t \mapsto I_p(t)$ konstant? Zeigen Sie für Ψ aus Bsp 2c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t,x)|^2 dx = a\sqrt{\pi}.$$

4. Zeigen Sie für ψ aus Bsp 2b), die Fourierdarstellung $\psi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{k^2}{2}t} e^{-\frac{k^2}{2}} dk$.

5. *Freiwillig:* Für $u \in \mathbb{R}$ sei $\psi_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (t,x) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{k^2}{2}t} e^{-\frac{(k-u)^2}{2}} dk$. Zeigen Sie
$$\psi_u(t,x) = e^{iux} e^{-i\frac{u^2}{2}t} \psi(t, x-ut) \text{ und } i\partial_t \psi_u(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 \psi_u(t,x).$$
Man beachte: $|\psi_u(t,x)|^2 = |\psi(t,x-ut)|^2$. Die Lösung $\Psi_u(t,x) := \psi_u(\tau,\xi)$ für $\tau = t\hbar/(ma^2)$ und $\xi = x/a$ wandert mit der Geschwindigkeit $v = u\hbar/(ma)$. (Galileitransformierte Lösung)