Komplexe Zahlen: Wurzel(n), Logarithmus und Holomorphie

1. Geben Sie für die vier Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$ die folgenden Größen an: $|z|, \Re z, \Im z, \arg(z)$.
2. $\arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) \;=?$, $\arg\left(\sqrt{3} - i\right) \;=?$ Berechnen Sie Betrag und Argument von $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$ und von $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$ für den Hauptzweig der Wurzelfunktion. Geben Sie auch die Hauptzweigwerte von $\ln\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ und $\ln\left(\sqrt{3} - i\right)$ an.
3. Kontrollieren Sie für die folgenden Funktionen f, ob die jeweils zugehörigen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.
   (a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$.
   (b) $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$.
   (c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(z)$.
   (d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i\alpha xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und festes $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Legen Sie eine Liste der (harmonischen!) Funktionen $\Re f$ und $\Im f$ an, die dieses Beispiel abwirft. Geben Sie auch die Kartenausdrücke dieser Funktionen in Polarkoordinaten an.

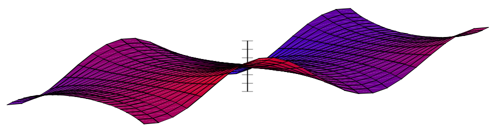

Figure 1: Die harmonische Funktion $\sin(x)\cosh(y)$

4. Bestimmen Sie $u, v : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) + iv(x, y) = \ln(x + iy)$ für alle $(x, y) \in U$. Hier ist ln der Hauptzweig-Logarithmus. Kontrollieren Sie Cauchy-Riemann auf $U_+ = \{(x, y) \in U : x > 0\}$. Gilt $\Delta u = \Delta v = 0$? Berechnen Sie: $i^i := e^{i \ln i} =?$

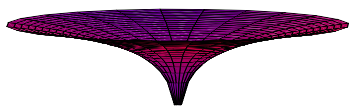

Figure 2: Die harmonische Funktion $\ln\sqrt{x^2 + y^2}$

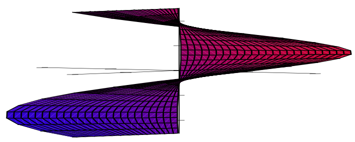

Figure 3: Die harmonische Funktion $(x, y) \mapsto \arg(x + iy)$