Name:..Matrikelnr:..

Zahl der abgegebenen Blätter inkl Angabeblatt..................

Erste Klausur *Begründen Sie nachvollziehbar!*

In Beispielen 1), 2) ist (x, y) die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt (SSP).

1. (22P) Für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gelte $u = y - x^2$.
   (a) (2P) Der Punkt $(1, b)$ liege in der Niveaumenge von u, die auch den Punkt $(0, 1)$ enthält. Welchen Wert hat b?
   (b) (2P) Skizzieren Sie die Niveaumenge durch $(0, 1)$.
   (c) (2P) Berechnen Sie zum SSP den Vektor $\mathrm{grad}_{(0,1)}(u)$.
   (d) (2P) Geben Sie einen Tangentenvektor t an die Niveaumenge durch $(0, 1)$ im Punkt $(0, 1)$ an.
   (e) (2P) $\left\langle t, \mathrm{grad}_{(0,1)}(u) \right\rangle =$ ....
   (f) (4P) Geben Sie die Richtungsableitung von u unter $X = \mathrm{grad}_p(u)$ im Punkt $p = (1, 1)$ an.
   (g) (2P) Geben Sie das Skalarfeld $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(u))$ an.
   (h) (4P) Ist das Vektorfeld $X = \mathrm{grad}(u) / |\mathrm{grad}(u)|$ konservativ? *Hinweis:* Prüfen Sie die Rotationsfreiheit.
   (i) (2P) Welchen Wert hat das Wegintegral von $\mathrm{grad}(u)$ längs des Geradenstücks von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$?

2. (8P) Für $u : \left\{p \in \mathbb{R}^2 : x(p) > 0\right\} \to \mathbb{R}$ gelte $u = y/x$.
   (a) (2P) Geben Sie einen polaren Kartenausdruck von u an.
   (b) (2P) Welche Werte nimmt der Polarwinkel φ am Definitionsbereich von u an?
   (c) (4P) Berechnen Sie $\Delta u =?$ in Polarkoordinaten.

3. (10P) Sei V ein orientierter, reeller Vektorraum der Dimension 3 und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein Skalarprodukt von V. Sei zudem $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ eine positiv orientierte ONB von V. Für $Y : V \to V$ gelte $Y(v) = e_1 \times (e_2 \times v)$ für alle $v \in V$.
   (a) (4P) Geben Sie das Skalarfeld $\mathrm{div}(Y)$ an.
   (b) (2P) Geben Sie das Vektorfeld $\mathrm{rot}(Y)$ an. Hat Y ein skalares Potential?
   (c) (4P) Geben Sie das Wegintegral von Y längs der Kurve $\gamma : [0, 1] \to V$ mit $\gamma(t) = t \cdot (e_1 + e_2)$ an.

Lösung.

1. (a) Es gilt $u(1,b) = u(0,1)$, also $b - 1 = 1$. Damit gilt $b = 2$. Die Niveaumenge, auf der u den Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt ist die Parabel, auf der $y = c + x^2$ gilt.

   (b) Die Niveaumenge $N_{(0,1)}u$ durch den Punkt $(0,1)$ ist die Lösungsmenge von $y - x^2 = 1$ in $\mathbb{R}^2$. Es ist dies der Graph der Abbildung $x \mapsto 1 + x^2$, also eine nach oben offene Parabel mit Tiefpunkt $(0,1)$.

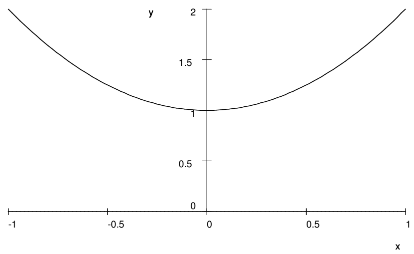

Figure 1:

   (c) Es gilt $\operatorname{grad}(u) = (-2x, 1)$ und daher $\operatorname{grad}_{(0,1)}(u) = (0,1)$.

   (d) Der horizontale Vektor $(1,0)$ ist im Punkt $(0,1)$ tangential an $N_{(0,1)}$.

   (e) Es gilt $\operatorname{grad}_{(0,1)}(u) = (0,1)$ und daher $\left\langle t, \operatorname{grad}_{(0,1)}(u)\right\rangle = \langle (1,0), (0,1)\rangle = 0$.

   (f) Es gilt $[\operatorname{grad}(u)]_{(a,b)}\, u = \left\langle \operatorname{grad}_{(a,b)}(u), \operatorname{grad}_{(a,b)}(u)\right\rangle = \left|\operatorname{grad}_{(a,b)}(u)\right|^2 = 1 + 4a^2$. Also $\left[\operatorname{grad}_{(1,1)}(u)\right] u = 5$.

   (g) Es gilt $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \Delta u = -2$.

   (h) Es gilt

$$X = \frac{\begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

   und daher

$$\partial_x X^2 - \partial_y X^1 = \partial_x X^2 = \partial_x \left(1 + 4x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -4x\left(1 + 4x^2\right)^{-3/2}.$$

   Das Feld X ist also nicht rotationsfrei und daher auch nicht konservativ.

   (i) Es gilt für eine beliebige d'bare Kurve γ von $(0,0)$ nach $(1,0)$

$$\int_\gamma \operatorname{grad}(u) = u(1,0) - u(0,0) = -1.$$

2. Für $u = y/x$ folgt mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\cos\varphi$ im Bereich $x > 0$ (rechte Halbebene) geschnitten mit Kartenbereich U

   (a) $u = \sin\varphi / \cos\varphi = \tan\varphi$.

   (b) Im Bereich $y > 0$ und $x > 0$ durchläuft φ alle Werte in $(0, \pi/2)$. Im Bereich $y < 0$ und $x > 0$ durchläuft φ alle Werte in $(3\pi/2, 2\pi)$. Somit nimmt φ alle Werte in $(0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ an.

   (c) und wegen $\tan' = 1/\cos^2$ gilt $\Delta u = \left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2\right)\tan(\varphi) = r^{-2}\partial_\varphi\left(1/\cos^2\varphi\right) = -2r^{-2}\left(1/\cos^3\varphi\right)(-\sin\varphi) = 2r^{-2}\tan(\varphi)/\cos^2(\varphi)$. Für $x \neq 0$ gilt auch

$$\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{1 + \tan^2\varphi}$$

   und somit

$$\Delta u = \frac{2}{r^2}\frac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{2}{r^2}\tan(\varphi)\left[1 + \tan^2\varphi\right].$$

3. Es gilt $Y(v) = e_1 \times (e_2 \times v) = e_2 \langle e_1, v\rangle - v \langle e_2, e_1\rangle = \langle e_1, v\rangle e_2$.

   (a) Es gilt $\operatorname{div}_v Y = \langle e_2, \operatorname{grad}_v \langle e_1, \cdot\rangle\rangle = \langle e_2, e_1\rangle = 0$, also $\operatorname{div} Y = 0$.

   (b) Es gilt $\operatorname{rot}_v Y = \operatorname{rot}_v (\langle e_1, \cdot\rangle e_2) = \operatorname{grad}_v \langle e_1, \cdot\rangle \times e_2 = e_1 \times e_2 = e_3$. Das VF Y hat daher kein skalares Potential.

   Alternative Berechnung von $\operatorname{rot} Y = \operatorname{rot}(e_1 \times (e_2 \times \cdot))$ mit der allgemeinen Faulenzerregel

$$\operatorname{rot}(X \times Y) = X \operatorname{div} Y - Y \operatorname{div} X - [X]\, Y + [Y]\, X.$$

   Setze $X = e_1$ und $Y = L_{e_2} = e_2 \times \cdot$ (Drehvektorfeld). Es gilt $\operatorname{div} X = 0 = \operatorname{div} Y$. Weiter gilt $[Y]\, X = 0$. Es bleibt also $[X]\, Y$ zu berechnen. Es gilt

$$[X]_v\, Y = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Y(v + \varepsilon X(v)) - Y(v)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e_2 \times (v + \varepsilon e_1) - e_2 \times v}{\varepsilon} = e_2 \times e_1 = -e_3$$

   und daher $\operatorname{rot}(X \times Y) = -[X]\, Y = e_3$.

   (c) Es gilt $\dot{\gamma}(t) = e_1 + e_2$ und daher

$$\begin{aligned} \int_\gamma Y &= \int_0^1 \langle Y(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\, dt = \int_0^1 \langle e_2 \langle e_1, t \cdot (e_1 + e_2)\rangle, e_1 + e_2\rangle\, dt \\ &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$