Einige elektrostatische Potentiale in krummen Karten

Im folgenden bezeichnet (x, y) die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$.
(r, φ) bezeichnet die Polarkoordinaten auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\right\}$ (geschlitzte Ebene).

1. Sei $u : U \to \mathbb{R}$ mit $u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$. Siehe Figur 1. Zeigen Sie: $\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) u = 0$. Hat u eine differenzierbare Fortsetzung auf $\mathbb{R}^2$? *Hinweis:* Berechnen Sie $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[(\partial_y u)(x, \varepsilon) - (\partial_y u)(x, -\varepsilon)\right] =?$ für $x > 0$. Zeigen Sie, dass die Niveaulinie $u = \sqrt{c} > 0$ die Parabel mit Brennpunkt 0 und Scheitel $(-c/2, 0)$ ist, und auf ihr $x = \left(y^2 - c^2\right) / (2c)$ gilt. Siehe Figur 2.

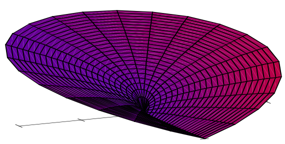

Figure 1: Die Funktion $u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$

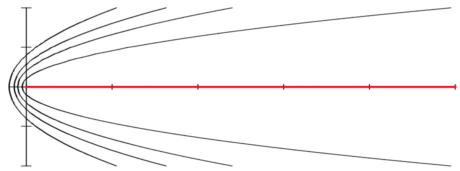

Figure 2: Niveaulinien von u

2. Zeigen Sie für u aus Bsp 1): $u = \sqrt{2r} \sin(\varphi/2)$ und $\Delta u = 0$ (*Hinweis:* $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2$).

3. Auf $U_+ = \left\{p \in \mathbb{R}^2 : y(p) > 0\right\}$ sei $r = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$ und $s = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$. Die Abbildung $\Phi = (r, s) : U_+ \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ist eine lokale Karte von $\mathbb{R}^2$. (Ebene parabolische Koordinaten)

   (a) Zeigen Sie: $x = \left(r^2 - s^2\right)/2$ und $y = rs$.

   (b) Zeigen Sie für die Kartenbasis $\left(\delta_1^\Phi, \delta_2^\Phi\right) = (\delta_r, \delta_s)$ von Φ, dass $(\delta_r, \delta_s) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$.

   (c) Zeigen Sie $G^\Phi = \left(r^2 + s^2\right) \cdot Id$, dann unter Verwendung des Satzes aus der Vorlesung über den Kartenausdruck von Δ, dass $\Delta = \frac{1}{r^2+s^2}\left(\partial_r^2 + \partial_s^2\right)$, und damit für u aus Bsp 1) $\Delta u = 0$.

4. Seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^3$ wie in der Vorlesung.

   (a) Zeigen Sie $\Delta\varphi = 0$. *Hinweis:* Benutzen Sie Δ in Kugelkoordinaten.

   (b) Für welche $\mathcal{C}^2$-Funktionen $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ löst $u = f \circ \theta$ die Laplacegleichung $\Delta u = 0$? Lösung: Für $f(\theta) = A \ln \tan(\theta/2) + B$ mit $A, B \in \mathbb{R}$. Welche Niveauflächen hat u und welche Feldlinien hat $\operatorname{grad}(u)$? Ist $|\operatorname{grad}(u)|$ bei festen Werten von θ und φ von r abhängig? Wo beginnen und wo enden die Feldlinien?

5. *Freiwillig:* Seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^3$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie für das elektrische Potential einer homogen geladenen Halbgerade, nämlich $\Phi = \ln(r(1 - \cos\theta))$ auf U, dass $\Delta\Phi = 0$. Auf welchen maximalen Definitionsbereich $U' \supset U$ lässt sich Φ zu einer C^2-Funktion fortsetzen?