Rotation; Laplaceoperator in Polar- und Kugelkoordinaten

1. Im Vektorraum V mit $\dim(V) = 3$ sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und eine Orientierung gewählt. $U \subset V$ sei offen. Zeigen Sie für $\mathcal{C}^1$-Vektorfelder $X, Y : U \to V$ die Faulenzerregeln

$$div\,(X \times Y) = \langle rotX, Y \rangle - \langle X, rotY \rangle \text{ und } \operatorname{div}\operatorname{rot} X = 0 \text{ für } X \in \mathcal{C}^2.$$

2. Sei $\Psi = (x, y)$ die Standardkarte von $\mathbb{R}^2$ und sei $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$ (geschlitzte Ebene). Sei $\Phi = (\rho, \varphi)$ die Karte der Polarkoordinaten auf U.

   (a) Skizzieren sie einige Niveaulinien von ρ bzw φ.

   (b) Zerlegen Sie die Kartenbasis in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \varphi_0)$ nach der Standardbasis.

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix $\left(\partial_j^\Phi \Psi^i\right)$ überall maximalen Rang hat.

   (d) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix[1] $G^\Phi(p)$ in $p \in U$ mit $\Phi(p) = (\rho_0, \varphi_0)$.

   (e) *Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R})$. Zeigen Sie $\Delta f = \left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2\right) f$ auf U.

   Hinweis: $\Delta f = \left[\delta_1^\psi\right]^2 f + \left[\delta_2^\psi\right]^2 f$. Drücken Sie die iterierte Richtungsableitung $\left[\delta_i^\psi\right]^2 f = \left[\delta_i^\psi\right]\left(\left[\delta_i^\psi\right] f\right)$ durch (iterierte) Richtungsableitungen unter δ_1^Φ und δ_2^Φ aus.

3. Berechnen Sie Δf mit kartesischen oder polaren Koordinaten für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
   a) $f = x^2 + y^2$, b) $f = x^2 - y^2$, c) $f = x^2 \cdot y^2$,
   d) $f = \left(a^2 + x^2 + y^2\right)^{-1}$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$, e) $f = \sin(kx)\, e^{ky}$ für ein $k \in \mathbb{R}$.

4. Am Kartenbereich U der Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2$ gelte $f_n = r^n \cos(n\varphi)$ und $g_n = r^{-n}\cos(n\varphi)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie $\Delta f_n = \Delta g_n = 0$. Geben Sie für $n = 0, 1, 2$ die Kartenausdrücke von f_n und g_n in der Standardkarte an. Sind f_n bzw g_n für $n = 0, 1, 2$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ oder gar $\mathbb{R}^2$ zu $\mathcal{C}^2$-Funktionen fortsetzbar? Figur 1 zeigt f_3.

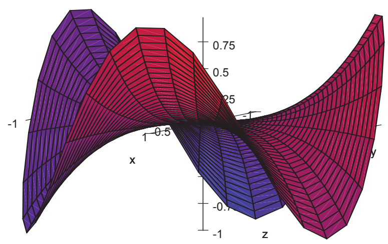

Figure 1: Der Graph von $f_3 = x^3 - 3xy^2$

5. (Freiwillig) Seien (r, θ, φ) Kugelkoordinaten auf $U \subset \mathbb{R}^3$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie $\Delta \cos\theta = -2\cos(\theta)/r^2$. Hinweis: Benutzen Sie Δ in Kugelkoordinaten. Welchen Kartenausdruck hat $\cos\theta$ bzw $\Delta\cos\theta$ in der Standardkarte? Lesen Sie daran ab: $\cos\theta$ und $\Delta\cos\theta$ sind stetig nach $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ fortsetzbar. Ist die stetige Fortsetzung von $\cos\theta$ bzw $\Delta\cos\theta$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion?

[1] Zum Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^2$.