

Rotation und Vektorpotential

Sei V ein 3d \mathbb{R} -Vektorraum mit SP $\langle \cdot, \cdot \rangle$, zugehöriger Norm $|\cdot|$ und gewählter Orientierung.

1. *Drehinvariante, radiale Vektorfelder sind rotationsfrei:* Sei $X : V \setminus 0 \rightarrow V$ mit $p \mapsto f(|p|) \cdot p$ für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie $\text{rot}(X) = 0$ entweder durch Nachrechnen mit den Faulenzerregeln, oder indem Sie ein C^2 -Potential Φ von X finden.
2. *Vektorpotentiale eines unendlich langen geraden Stromfadens:* Sei $e \in V$ mit $|e| = 1$ und $c \in \mathbb{R}$. Es gelte¹ auf $U = V \setminus (\mathbb{R} \cdot e)$ für das Vektorfeld B

$$cB(p) = \frac{e \times p}{|e \times p|^2}.$$

B hat die Symmetrien: $B \circ R = R \circ B$ für alle Drehungen R um e und $B \circ T_{\lambda e} = B$ für alle Translationen von V um λe mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Beachten Sie: $|e \times p|$ ist der Abstand von p zur Achse $\mathbb{R} \cdot e$.

- (a) Zeigen Sie $\text{div}(B) = 0$ und $\text{rot}(B) = 0$ auf U .
- (b) Berechnen Sie mit dem Ansatz $cA(p) = f(|e \times p|) \cdot e$ (auf U) ein Vektorpotential zu B . Finden Sie also eine Lösung A von $B = \text{rot}(A)$. Gibt es mehrere Lösungen?²
- (c) Ist B konservativ? *Hinweis:* Berechnen Sie das Wegintegral von B längs eines Kreises um 0, der senkrecht zu e liegt.

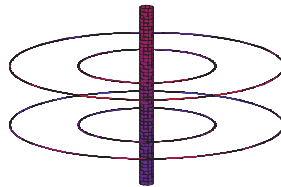


Figure 1: B-Feldlinien eines Stromfadens

3. *Ein Vektorpotential eines magnetischen Punktdipols:* Das magnetische Flussdichtefeld eines Punktdipols mit dem magnetischen Dipolvektor $m \in V$ in 0 ist $B : U = V \setminus 0 \rightarrow V$ mit³

$$cB(p) = \frac{1}{|p|^3} \left(3 \frac{\langle m, p \rangle}{|p|^2} p - m \right).$$

Zeigen Sie für das Vektorfeld $A : U \rightarrow V$ mit $cA(p) = (m \times p) / |p|^3$, dass $B = \text{rot}(A)$.

4. Sei B wie in Beispiel 3). Zeigen Sie $\text{rot}(B) = 0$. Hinweis: Ist B konservativ? Beachten Sie Beispiel 2 von Blatt 2 oder rechnen Sie mit den Faulenzerregeln drauflos.
5. (Freiwillig) *Weitere Vektorpotentiale des Punktdipols?* Sei B wie in Beispiel 3. Bestimmen Sie zu dem Ansatz $cA(p) = f(|p|) \cdot (m \times p)$ auf U die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $B = \text{rot}(A)$ gilt. Ist also A durch B eindeutig festgelegt?

¹ B ist für $1/c = \mu_0 \frac{I}{2\pi}$ das Magnetfeld eines auf $\mathbb{R} \cdot e$ in Richtung e fließenden Stromes der Stärke I .

² Eine Lösung ergibt sich mit $cf(x) = -\ln(x)$.

³ Dabei ist $c = 4\pi/\mu_0$.