Divergenz eines Vektorfeldes - Wo enden die E-Feldlinien einer homogen geladenen Kugel?

V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehöriger Norm $|\cdot|$.

1. Sei $X : V \to V$ die identische Abbildung. Skizzieren Sie X und zeigen Sie $\operatorname{div} X = n$.

2. Seien $m \in \mathbb{Z}$ und $Y : V \setminus 0 \to V$ mit $Y(p) = |p|^m \cdot p$. Zeigen Sie $\operatorname{div}_p Y = (m+n) \cdot |p|^m$ für alle $p \in V \setminus 0$. Für welche m hat Y eine stetige Fortsetzung nach 0?

3. Seien $\rho \in \mathbb{R}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei X wie in Bsp 1) und $Z = f(|\cdot|) \cdot X : V \to V$ mit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Bestimmen Sie f so, dass $\operatorname{div}_p Z = \rho$ für alle $p \in V$ mit $|p| < R$ und $\operatorname{div}_p Z = 0$ für alle $p \in V$ mit $|p| > R$. Sei $p \in V$ mit $|p| = R$. Skizzieren Sie den Graphen der Abbildung $x \mapsto |Z(xp)|$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ für $n = 1, 2, 3$. *Lösung: Figur 1 und*

$$Z(p) = \frac{\rho}{n} \cdot \begin{cases} p & \text{für } |p| < R \\ (R/|p|)^n p & \text{für } |p| > R \end{cases} .$$

   Kontrolle mittels des Satzes von Gauss für $n = 3$: Überprüfen Sie $\langle Z(p), p/|p| \rangle = Q(|p|)/4\pi |p|^2$ für $p \neq 0$. Hier bezeichnet $Q(|p|)$ die gesamte Ladung, die in der Kugel vom Radius $|p|$ um 0 enthalten ist, also $Q(|p|) = \rho \cdot 4\pi |p|^3/3$ für $|p| < R$ und $Q(|p|) = \rho \cdot 4\pi R^3/3$ für $|p| \geq R$. Analoges gilt für $n \neq 3$, wenn Oberflächen- und Volumsinhalt der 3d Kugel durch die entsprechenden Ausdrücke der n dimensionalen Kugel ersetzt werden.

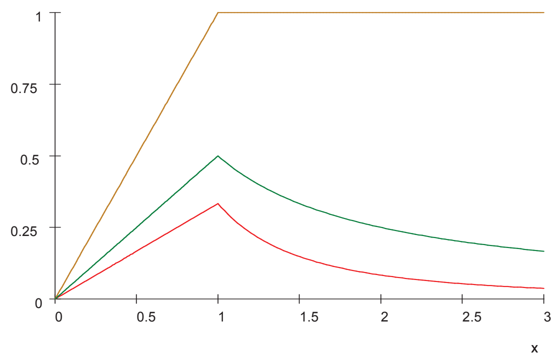

Figure 1: $|Z(xp)|/\rho R$ für $n = 1$ (braun), $n = 2$ (grün) und $n = 3$ (rot)

4. Bestimmen Sie die Feldlinie Γ von Z aus Bsp 3) durch einen beliebigen Punkt $p \in V$. *Hinweis:* Es genügt, die DG $\dot{\gamma} = \gamma$ zu lösen. Warum? *Lösung*[1]: $\Gamma = \mathbb{R}_{>0} \cdot p$.

5. Freiwilliger Denksport: Skizzieren Sie für $n = 3$ einige Feldlinien der folgenden Ladungsdichten: a) Zwei homogen geladene Kugeln mit Radien $R_1 = R_2$ gleicher oder gegengesetzter Gesamtladung nebeneinander mit Mittelpunktsabstand $d > 2R_1$. b) Eine homogen geladene Kugelschale mit Radien $0 < R_1 < R_2$.

[1] Was ist also von der folgenden Behauptung zu halten? *The lines of force originate on positive charges and terminate on negative charges.* (p. 610 in Halliday, Resnick, Krane, *Physics*, Vol 2, 4th Edt, New York, 1992) Diese Behauptung gilt *nur* für das E-Feld einer endlichen Zahl von Punktladungen. Im Fall allgemeinerer Ladungsdichten kommt der folgende Satz zur Anwendung: Die Randpunkte der Feldlinien eines lokal Lipschitzstetigen Vektorfeldes X sind Randpunkte des Definitionsbereiches von X oder Nullstellen von X, sogenannte kritische Punkte von X. Aber Achtung: Das schließt nicht aus, dass Feldlinien aus dem Unendlichen kommen oder auch dorthin gehen.