Proseminar Mathematische Methoden der Physik II *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 1, 10. Oktober 2016

Gradient; Kurvenintegral; Vektorfelder mit bzw ohne Potential

1. Bestimmen Sie die Gradientenfelder zu den Skalarfeldern f der Beispiele 1 und 3 von Blatt 12 zum PS MMP1 im SoSe16.

2. Bestimmen Sie die Gradientenfelder zu den Skalarfeldern f von Beispiel 4 von Blatt 12 zum PS MMP1 im SoSe16.

3. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $X : V \to V$ mit $X(x, y) = \left(x^2 y, xy^2\right)$. (Figur 1) Zeigen Sie für das Kurvenintegral von X längs der Kurve $\gamma : [0, 1] \to V$ mit $\gamma(t) = \left(1 - t, t^2\right)$

$$\int_\gamma X := \int_0^1 \langle (X \circ \gamma)(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \frac{1}{70}.$$

Skizzieren Sie die Bahn von γ, also die Punktmenge $\gamma([0, 1]) \equiv \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}$.

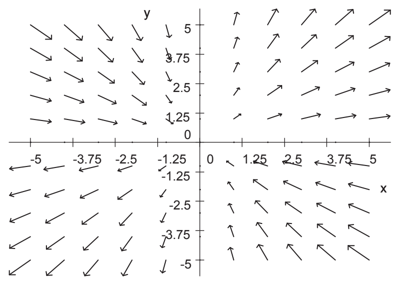

Figure 1: Das Vektorfeld $\left(x^2 y, xy^2\right)$

4. Ein ebenes Stück Erdoberfläche sei als Schnitt der Ebene $z = -1$ mit dem Würfel $W_L = (-L, L)^3 \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben. Es sei $L > 1$. Auf $U = \{p \in W_L : z(p) > -1\}$ habe das Gravitationspotential $\Phi : U \to \mathbb{R}$ den Standardkartenausdruck

$$\Phi = g\left(z + \frac{\varepsilon}{L}\left(x^2 - y^2\right)\right).$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigungskonstante und ε ein Störparameter mit $|\varepsilon| \ll 1$. Auf einen Körper der Masse m wirkt am Ort $p \in U$ somit die Schwerkraft $-m \cdot grad_p(\Phi)$.

Zwei Zahlen $r_1, r_2 \in (0, L)$ seien gewählt. Ebenso die Kurven

$$\gamma_1 \; : \; \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to U, \quad t \mapsto r_1 \cdot (\cos t, \sin t, 0), \quad \gamma_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to U, \quad t \mapsto r_2 \cdot (\cos t, \sin t, 0),$$
$$\eta_1 \; : \; [r_1, r_2] \to U \text{ mit } \eta_1(t) = (t, 0, 0), \quad \eta_2 : [r_1, r_2] \to U \text{ mit } \eta_2(t) = (0, t, 0).$$

(a) Skizzieren Sie die Bahnen dieser vier Kurven samt Durchlaufsinn und die Niveaufläche von Φ durch den Punkt 0.

(b) Berechnen Sie die Wegintegrale des Vektorfeldes $X = grad(\Phi) / |grad(\Phi)|$ von $p_1 = (r_1, 0, 0)$ nach $p_2 = (0, r_2, 0)$ längs der beiden Wege $\eta_2 \cup \gamma_1$ bzw $\gamma_2 \cup \eta_1$. Beobachten Sie: Obwohl beide Wege vollständig in der $z = 0$ Ebene verlaufen, würde eine Höhenmessung mit Wasserwaage und Meterstab einen (wegabhängigen!) 'Höhenunterschied' zwischen p_1 und p_2 ergeben.

(c) Hat das Vektorfeld X ein Potential?

(d) Ist X wirbelfrei?

(e) Welche Werte haben die analogen Wegintegrale für das Vektorfeld $Y = grad(\Phi/g)$? Unterscheiden auch sie sich voneinander? Was wird neben Wasserwaage und Meterstab noch benötigt, um ein Wegintegral von Y zu messen?