Vorlesungsprüfung Mathematische Methoden der Physik I *Universität Innsbruck*
705.211 (VO3, SS17, ΓΓ) *3. Termin, 12. Jänner 2018, 14:15-15:30h, HS B3*

Name:..Matrikelnr:..

*Keine Hilfsmittel außer Papier & Stift! Meteo-Studis ignorieren die mit * gekennzeichnete Frage. Begründen Sie Ihre Antworten nachvollziehbar.*

---

1. (16P) *Differentialgleichungen:* Sei $f : \mathbb{R} \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$. Im Folgenden ist von der DG $y' = f(x, y)$ die Rede.
   (a) (4P) Sie ist linear? autonom? vom Typ der separierten Variablen? von welcher Ordnung?
   (b) (2P) Geben Sie (ohne Rechnung geht das!) eine maximale Lösung mit $y(0) = 1$ an.
   (c) (3P) Skizzieren Sie ihr Richtungsfeld. *Hinweis:* Skizzieren Sie zuerst den Graphen von $h(y) = \sqrt{1 - y^2}$ für $-1 \le y \le 1$.
   (d) (2P) *Welche der folgenden Funktionen ist eine Lösung? (i) sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$, (ii) sin auf $\mathbb{R}$, (iii) cos auf $[0, \pi/2]$, (iv) cos auf $[-\pi/2, 0]$.
   (e) (3P) *Bestimmen Sie eine maximale Lösung α mit $\alpha(0) = 0$. Inklusive Def-bereich! *Hinweis:* Für $y^2 \le 1$ gilt: $\Phi(y) := \arcsin y \Rightarrow$ ergibt $\Phi'(y) = 1/\sqrt{1 - y^2}$.
   (f) (2P) Gibt es mehr als eine maximale Lösung mit $y(0) = 1$?

2. (4P) *Differentialgleichungen:* Im folgenden ist von der DG $y''(x) - 4y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ die Rede.
   (a) (1P) Ihre maximalen Lösungen haben welchen Definitionsbereich?
   (b) (1P) Welche Dimension hat der Raum der maximalen Lösungen?
   (c) (2P) Geben Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ an, sodass $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der DG ist.

3. (10P) *Fourieranalysis:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$. (Siehe Fig. 1)

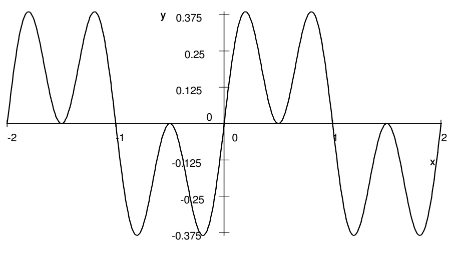

Figure 1: $\sin(\pi x)\cos^2(\pi x)$

   (a) (1P) Ist f gerade / ungerade / weder noch ?
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass f ein trigonometrisches Polynom ist. Welche Ordnung n hat es?
   (c) (4P) Bestimmen Sie $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   (d) (1P) Welche kleinste Periodenlänge hat f?
   (e) (2P) ist $|f|$ ein trigonometrisches Polynom? *Hinweis:* Ist $|f|$ im Punkt $x = 0$ diffbar?

4. (8P) *Vektoranalysis:* Sei V ein reeller Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und sei $a \in V$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein Skalarprodukt von V. Sei weiter $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \langle p, a \rangle^4$.
   (a) (3P) Berechnen Sie das Differential $d_p f : V \to \mathbb{R} \ni X \mapsto$ ....
   (b) (3P) Berechnen Sie die Richtungsableitung $[X]_p f =$ .... für $X = a$.
   (c) (2P) Geben Sie den Vektor $\mathrm{grad}_p(f)$ für $p = 2a$ an.

Lösung:

1a) Sie ist nicht linear, autonom, vom Typ der separierten Variablen und erster Ordnung.
1b) $y(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
1c) Der Graph von h ist ein Halbkreis in der oberen Halbebene um 0 mit Radius 1.

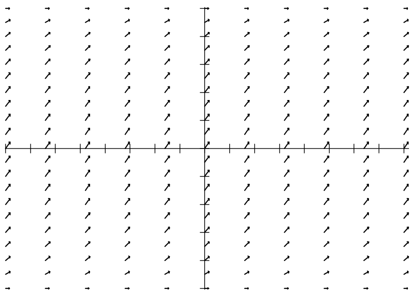

Figure 2:

1d) sin erfüllt auf $[-\pi/2, \pi/2]$ die DG, nicht aber auf $\mathbb{R}$. Ähnlich erfüllt cos auf $[-\pi/2, 0]$ die DG nicht aber auf $[0, \pi/2]$. Somit sind nur die in (i) und (iv) angeführten Funktionen Lösungen.

1e) Es gilt $\arcsin(\alpha(x)) = x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zulässig sind höchstens alle x mit $x + c \in (-\pi/2, \pi/2)$. Wegen $\alpha(0) = 0$ folgt $c = \arcsin(0) = 0$. Es folgt $\alpha(x) = \sin x$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$. Die Lsg kann nach ganz $\mathbb{R}$ zu einer C^1-Lösung fortgesetzt werden. Es gilt für diese

$$\alpha(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq -\pi/2 \\ \sin x & \text{für } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{für } x \geq \pi/2 \end{cases} .$$

1f) Ja, neben der Lösung aus 1b) ist jede der Linkstranslate α_c mit $\alpha_c(x) = \alpha(x + c)$ und $c \geq \pi/2$ eine Lösung mit $\alpha_c(0) = 1$.

2a) Der Def-bereich ist ganz $\mathbb{R}$.
2b) Die Dimension ist 2.
2c) Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ löst die DG $y'' - 4y = 0$ für $\left(\lambda^2 - 4\right) e^{\lambda x} = 0$, also für $\lambda = \pm 2$.

3a) f ist ungerade.
3b) f ist als Produkt trigonometrischer Polynome wieder eines. Es hat den Grad 3.
3c) Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(x)\cos^2(x) &= \frac{1}{4}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) = \frac{1}{4}\frac{e^{3ix} + 2e^{ix} + e^{-ix} - e^{ix} - 2e^{-ix} - e^{-3ix}}{2i} \\ &= \frac{1}{4}\frac{e^{3ix} - e^{-3ix} + e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{4}\left[\sin x + \sin 3x\right]. \end{aligned}$$

Es gilt also $b_1 = b_3 = 1/4$. Alle anderen Koeffizienten sind gleich 0.

3d) Die kleinste Periodenlänge von $\sin x$ ist 2π. Die Periodenlängen von $\sin 3x$ sind die positiv ganzzahligen Vielfachen von 2π. Die kleinste gemeinsame Periodenlänge ist 2π.

3e) f ist ungerade und es gilt $f'(0) = 1$. Damit ist $|f|$ in 0 nicht d'bar.

4a) Es gilt nach der Kettenregel: $d_p f(X) = 4\langle p, a\rangle^3 \langle X, a\rangle$.
4b) Es gilt $d_p f(X) = [X]_p f = d_p f(X)$. Für $X = a$ ergibt sich $[X]_p f = 4\langle p, a\rangle^3 \langle a, a\rangle = 4\langle p, a\rangle^3 |a|^2$.
4c) Es gilt $\operatorname{grad}_p f = 4\langle p, a\rangle^3 a$. Für $p = 2a$ folgt daraus $\operatorname{grad}_{2a} f = 4\langle 2a, a\rangle^3 a = 32|a|^6 a$.