Name:...Matrikelnr:..

*Keine Hilfsmittel außer Papier & Stift! Meteo-Studis ignorieren die mit * gekennzeichnete Frage. Begründen Sie Ihre Antworten nachvollziehbar.*

---

1. (10P) *Differentialgleichungen:* Sei $f : \mathbb{R} \times [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y(1 - y)$. Im folgenden ist von der DG $y' = f(x, y)$ die Rede.
   (a) (4P) Sie ist linear? autonom? vom Typ der separierten Variablen? von welcher Ordnung?
   (b) (1P) Geben Sie (ohne Rechnung geht das!) ihre maximale Lösung mit $y(0) = 1$ an.
   (c) (2P) Skizzieren Sie ihr Richtungsfeld. *Hinweis:* Skizzieren Sie zuerst den Graphen von $h(y) = y(1 - y)$ für $1 \leq y < \infty$.
   (d) (3P) *Bestimmen Sie ihre maximale Lösung α mit $\alpha(0) = 2$. Inklusive Def-bereich! *Hinweis:* Rechnen Sie für $y > 1$ nach: $\Phi(y) = \ln(y/(y-1)) = \ln y - \ln(y-1)$ ergibt $\Phi'(y) = \frac{1}{y(1-y)}$.

2. (6P) *Differentialgleichungen:* Im folgenden ist von der DG $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ die Rede.
   (a) (3P) Sie ist: homogen linear? autonom? Von welcher Ordnung?
   (b) (1P) Ihre maximalen Lösungen haben welchen Definitionsbereich?
   (c) (1P) Welche Dimension hat der Raum der maximalen Lösungen?
   (d) (1P) Existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der DG ist?

3. (10P) *Fourieranalysis:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$. (Siehe Fig. 1)

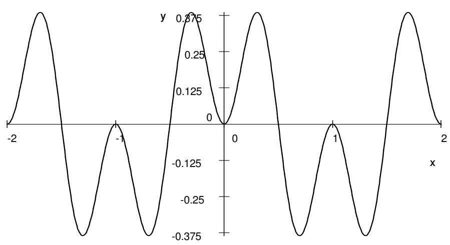

Figure 1: $\cos(\pi x) \sin^2(\pi x)$

   (a) (1P) Ist f gerade / ungerade / weder noch ?
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass f ein trigonometrisches Polynom ist. Welche Ordnung n hat es?
   (c) (4P) Bestimmen Sie $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   (d) (1P) Welche kleinste Periodenlänge hat f?
   (e) (2P) ist $|f|$ ein trigonometrisches Polynom? *Hinweis:* Ist $|f|$ im Punkt $x = \pi/2$ diffbar?

4. (8P) *Vektoranalysis:* Sei V ein reeller Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und sei $r \in V$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein Skalarprodukt von V. Sei weiter $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \langle p, r \rangle^2$.
   (a) (3P) Berechnen Sie das Differential $d_p f : V \to \mathbb{R} \ni X \mapsto$ ....
   (b) (3P) Berechnen Sie die Richtungsableitung $[X]_p f =$ .... für $X = r$.
   (c) (2P) Geben Sie den Vektor $\mathrm{grad}_p(f)$ für $p = r$ an.

Lösung

1a) Sie ist nicht linear; sie ist autonom; sie ist vom Typ der separierten Variablen; sie ist von der Ordnung 1.

1b) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = 1$.

1c)

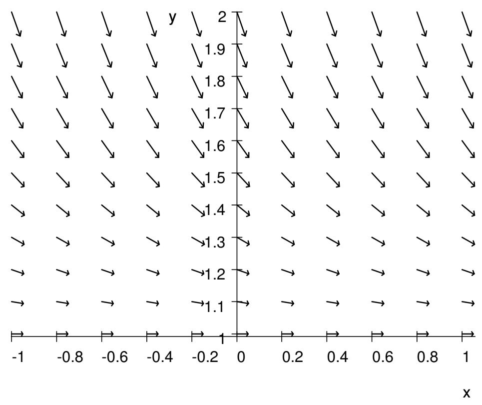

Figure 2: Das VF der logistischen DG für $y > 1$

1d) Es gilt $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ mit $h(y) = y(1-y)$ für $1 \leq y < \infty$ und $g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$. Die konstante Lösung ist $y = 1$. Die nichtkonstanten Lösungen ergeben sich aus einer Stammfunktion von $1/h$ auf dem maximalen nullstenfreien Teilintervall $(1, \infty)$. Eine Stammfunktion von $1/y(1-y)$ ist die Funktion

$$\Phi(y) = \ln y - \ln(y-1) = \ln\left[\frac{y}{y-1}\right].$$

Somit folgt

$$\ln\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}\right) = x + C$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich

$$\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1} = e^C e^x = \frac{e^x}{c}$$

für ein $c > 0$. Weiter folgt schließlich für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $c^{-1}e^x > 1$ bzw $e^x > c$ bzw $x > \ln c$

$$\alpha(x) = \frac{c^{-1}e^x}{c^{-1}e^x - 1} = \frac{1}{1 - ce^{-x}}.$$

Der maximale Defbereich ist somit das Intervall $(\ln c, \infty)$. Die Bedingung $\alpha(0) = 2$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$2 = \frac{1}{1-c}.$$

Das ist äquivalent zu $1 - c = 1/2$ bzw $c = 1/2$. Somit ist die gesuchte Funktion α im Bereich $(-\ln 2, \infty)$ durch

$$\alpha(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-x}} = \frac{2}{2 - e^{-x}}$$

gegeben. Siehe Figur 3.

2a) Sie ist homogen linear, autonom und von 2. Ordnung.

2b) Sie haben den Defr-bereich $(-\infty, \infty)$.

2c) Er hat die Dimension 2.

2d) Einsetzen in die DG ergibt die charakteristische Gl

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Die Funktion y mit $y(x) = e^{\lambda x}$ ist somit genau dann Lösung, wenn $\lambda = 1$.

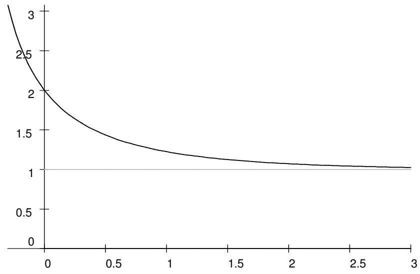

Figure 3: Die Lösung α

3a) Die Funktion cos ist gerade. Die Funktion sin ist ungerade. Somit ist $\sin^2$ gerade. Also ist auch f gerade.

3b) Sinus und Cosinus sind trigonometrische Polynome der Ordnung 1. Produkte trigonometrischer Polynome sind wieder trigonometrische Polynome. Ihre Ordnung addiert sich. Somit ist f ein trigonometrisches Polynom der Ordnung 3.

3c) Es gilt $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$. Hilfsformeln:

$$\sin^2(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{1}{4}\left[e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right].$$

Daraus ergibt sich

$$f(x) = \cos(x)\frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(x) - \cos(x)\cos(2x)\right].$$

Es gilt nun auch

$$\cos(x)\cos(2x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \frac{1}{4}\left[e^{3ix} + e^{-ix} + e^{ix} + e^{-3ix}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(x) + \cos(3x)\right].$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x) - \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \cos(3x)\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\cos(3x)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\cos(x) - \cos(3x)\right). \end{aligned}$$

Somit gilt $a_0 = 0 = a_2$, $\quad a_1 = 1/4$ und $a_3 = -1/4$. Die Konstanten b_1, b_2, b_3 sind gleich 0.

3d) Die kleinste Periodenlänge ist 2π.

3e) Es gilt

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\cos(x) - \cos(3x)\right) \text{ und } f'(x) = -\frac{1}{4}\left(\sin(x) - 3\sin(3x)\right).$$

Es gilt also $f(\pi/2) = 0$ und

$$f'(\pi/2) = -\frac{1}{4}\left(1 - 3(-1)\right) = -1.$$

Damit ist $|f|$ in $\pi/2$ nicht differenzierbar. Somit ist $|f|$ auch kein trigonometrisches Polynom, welches ja eine C^∞-Funktion ist.

4a) Es gilt nach der Kettenregel

$$(d_p f)(X) = 2\langle p, r\rangle\langle r, X\rangle.$$

4b) Es gilt für $X = r$,

$$[X]_p f = (d_p f)(X) = 2\langle p, r\rangle |r|^2.$$

4c) Es gilt $\operatorname{grad}_p(f) = 2\langle p, r\rangle r$ und somit für $p = r$

$$\operatorname*{grad}_r(f) = 2|r|^2 r.$$