Name:..Matrikelnr:...

*Keine Hilfsmittel außer Papier & Stift! Meteo-Studis ignorieren die mit * gekennzeichnete Frage. Begründen Sie Ihre Antworten nachvollziehbar.*
Lösen Sie je nach Vorliebe entweder Beispiel 4 oder 5. (Sie sind einander fast äquivalent.)

---

1. (10P) *Differentialgleichungen:* Sei $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = y(1-y)$. Im folgenden ist von der DG $y' = f(x,y)$ die Rede.
   (a) (4P) Sie ist linear? autonom? vom Typ der separierten Variablen? von welcher Ordnung?
   (b) (1P) Geben Sie (ohne Rechnung geht das!) ihre maximale Lösung mit $y(0) = 0$ an.
   (c) (2P) Skizzieren Sie ihr Richtungsfeld. *Hinweis:* Skizzieren Sie zuerst den Graphen von $h(y) = y(1-y)$ für $0 \leq y \leq 1$.
   (d) (3P) *Bestimmen Sie ihre maximale Lösung α mit $\alpha(0) = 1/2$.

2. (6P) *Differentialgleichungen:* Im folgenden ist von der Legendre-DG
$$\left(1-x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$$
   für $-1 < x < 1$ mit festem $\lambda \in \mathbb{R}$ die Rede.
   (a) (3P) Sie ist: homogen linear? autonom? Von welcher Ordnung?
   (b) (1P) Ihre maximalen Lösungen haben welchen Definitionsbereich?
   (c) (1P) Wieviele linear unabhängige maximale Lösungen besitzt sie?
   (d) (1P) Für welche Werte von λ hat sie eine nichttriviale polynomiale Lösung?

3. (10P) *Fourieranalysis:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos^3(x)\sin(x)$.
   (a) (1P) Ist f gerade / ungerade / weder noch ?
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass f ein trigonometrisches Polynom ist. Welche Ordnung n hat es?
   (c) (4P) Bestimmen Sie $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   (d) (1P) Hat f die Periode π?
   (e) (2P) ist $|f|$ ein trigonometrisches Polynom? *Hinweis: Bestimmen Sie* $f(0) = \ldots$ und $f'(0) = \ldots$ und ziehen Sie daraus Ihre Schlüsse.

4. (8P) *Vektoranalysis koordinatenfrei:* Sei V ein 2d reeller Vektorraum. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein Skalarprodukt von V und (r,s) sei eine ONB von V. Sei weiter $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \langle p, r \rangle \langle s, p \rangle$. Diese Abbildung ist differenzierbar.
   (a) (3P) Berechnen Sie das Differential $d_p f : V \to \mathbb{R} \ni X \mapsto$ ....
   (b) (3P) Berechnen Sie die Richtungsableitung $[X]_p f =$ .... für $X = r$ und $p = s$.
   (c) (2P) Geben Sie den Vektor $\operatorname{grad}_p(f)$ für $p = r + s$ an.

5. (8P) *Vektoranalysis in Koordinaten:* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$.
   (a) (3P) Berechnen Sie $\operatorname{grad}_{(x,y)}(f) = (.....,......)$ zum Standardskalarprodukt.
   (b) (3P) Berechnen Sie die Richtungsableitung $[(a,b)]_{(x,y)} f =$ ....
   (c) (2P) Berechnen Sie mit dem Standardskalarprodukt $\left\langle \operatorname{grad}_{(x,0)} f, (0,b) \right\rangle =$ ....

Lösung

1a) Sie ist nicht linear; sie ist autonom; sie ist vom Typ der separierten Variablen; sie ist von der Ordnung 1.

1b) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = 0$.

1c)

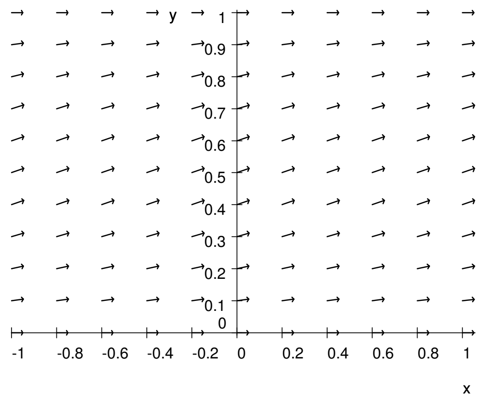

Figure 1: Das VF der logistischen DG

1d) Es gilt $f(x,y) = g(x)h(y)$ mit $h(y) = y(1-y)$ für $0 \leq y \leq 1$ und $g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$. Die konstanten Lösungen sind $y = 0$ und $y = 1$. Die nichtkonstanten Lösungen ergeben sich aus einer Stammfunktion von $1/h$ auf dem maximalen nullstenfreien Teilintervall $(0,1)$. Eine Stammfunktion von $1/y(1-y)$ ist die Funktion

$$\Phi(y) = \ln y - \ln(1-y) = \ln\left[\frac{y}{1-y}\right].$$

Somit folgt

$$\ln\left(\frac{\alpha(x)}{1-\alpha(x)}\right) = x + C$$

für ein $C \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich

$$\frac{\alpha(x)}{1-\alpha(x)} = e^C e^x = \frac{e^x}{c}$$

für ein $c > 0$. Weiter folgt schließlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\alpha(x) = \frac{c^{-1}e^x}{1+c^{-1}e^x} = \frac{1}{1+ce^{-x}}.$$

Die Bedingung $\alpha(0) = 1/2$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+c}.$$

Das ist äquivalent zu $1 + c = 2$ bzw $c = 1$. Somit ist die gesuchte Funktion α durch

$$\alpha(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

gegeben. Siehe Figur 2. Anmerkung: Die Funktion ψ mit $\alpha = \frac{1}{2} + \psi$ ist ungerade. Es gilt

$$\psi(x) = \alpha(x) - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Nun gilt

$$2\psi(-x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -2\psi(x).$$

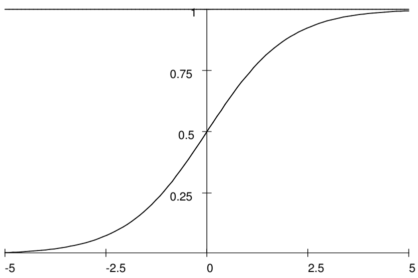

Figure 2: Die Lösung α

2a) Sie ist homogen linear, nicht autonom und von 2. Ordnung.
2b) Sie haben den Defr-bereich $(-1, 1)$.
2c) Sie hat 2 lin unabhängige Lösungen.
2d) Für $\lambda = n(n+1)$mit $n \in \mathbb{N}_0$ hat sie die Legendrepolynome cP_n als Lösungen.
3a) Die Funktion cos ist gerade und somit auch $\cos^3$. Die Funktion sin ist ungerade. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist ungerade. Also ist f ungerade.
3b) Sinus und Cosinus sind trigonometrische Polynome der Ordnung 1. Produkte trigonometrischer Polynome sind wieder trigonometrische Polynome. Ihre Ordnung addiert sich. Somit ist f ein trigonometrisches Polynom der Ordnung 4.
3c) Es gilt $f(x) = \cos^3(x)\sin(x) = \cos^2(x)\cos(x)\sin(x)$. Hilfsformeln:

$$\cos^2(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{4}\left[e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right] = \frac{1}{2}\left[1+\cos(2x)\right].$$

$$\cos(x)\sin(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{4i}\left[e^{2ix}-e^{-2ix}\right] = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Daraus ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[1+\cos(2x)\right]\sin(2x) = \frac{1}{4}\left[\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(4x)\right].$$

Somit gilt $b_2 = 1/4, \quad b_4 = 1/8$ und $b_1 = b_3 = 0$. Alle Konstanten $a_0, \ldots a_4$ sind gleich 0.
3d) Die kleinste Periodenlänge von $\sin(2x)$ ist π. Die von $\sin(4x)$ ist $\pi/2$. Die kleinste Periodenlänge von f ist somit π. Dass f die Periode π hat, ist auch direkt zu sehen, denn es gilt

$$f(x+\pi) = \cos^3(x+\pi)\sin(x+\pi) = (-1)^3\cos^3(x)(-1)\sin(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
3e) Die Funktion f hat die Nullstelle $x_0 = 0$ mit $f'(x_0) \neq 0$, denn es gilt

$$\frac{d}{dx}\cos^3(x)\sin(x) = -3\cos^2(x)\sin^2(x) + \cos^4(x).$$

Es gilt also $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Damit ist $|f|$ in 0 nicht differenzierbar. Somit ist $|f|$ auch kein trigonometrisches Polynom, welches ja eine C^∞-Funktion ist.
4a) Es gilt nach der Produktregel

$$(d_p f)(X) = \langle p, r\rangle \langle s, X\rangle + \langle X, r\rangle \langle s, p\rangle.$$

4b) Es gilt,

$$[X]_p f = (d_p f)(X) = (d_s f)(r) = \langle s, r\rangle \langle s, r\rangle + \langle r, r\rangle \langle s, s\rangle = 0 + 1 \cdot 1 = 1.$$

4c) Es gilt für $p = r + s$

$$\operatorname*{grad}_p(f) = \langle p, r\rangle s + \langle s, p\rangle r = \langle r+s, r\rangle s + \langle s, r+s\rangle r = r + s.$$

5a) Es gilt

$$\underset{(x,y)}{\operatorname{grad}}(f) = (\partial_x f, \partial_y f) = (y, x).$$

5b) Es gilt

$$[(a,b)]_{(x,y)}\, f = \left\langle (a,b), \underset{(x,y)}{\operatorname{grad}}(f) \right\rangle = \langle (a,b), (y,x) \rangle = ay + bx.$$

5c) Es gilt

$$\left\langle \underset{(x,0)}{\operatorname{grad}} f, (0,b) \right\rangle = bx.$$