Vorlesungsprüfung Mathematische Methoden der Physik I *Universität Innsbruck*
705.211 (VO3, SS15, ΓΓ) *1. Juli 2015, 10:15-11:30h*

Name:...*Matrikelnr:*..

*Ergänzen Sie den Text und geben Sie höchstens zwei A4 Blätter mit Nebenrechnungen ab. Keine Hilfsmittel außer Papier & Stift! Meteo-Studis ignorieren die mit * gekennzeichneten Fragen.*

---

1. (5P) *Differentialgleichungen:* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{x-y}$.
   (a) (3P) Die DG $y' = f(x,y)$ hat die Ordnung ....; sie ist linear ....; sie ist nicht linear ......; sie ist vom Typ der separierten Variablen ....
   (b) (1P) Jede Lösung von $y' = f(x,y)$ ist streng monoton wachsend .... / fallend...... / weder noch .... (Kreuzen Sie die richtige Aussage an)
   (c) (1P) Die maximale Lösung α von $y' = f(x,y)$ mit $\alpha(0) = -1$ erfüllt $\alpha(x) = \ln\left(e^x + e^{-1} - 1\right)$ für alle $x >$ ....

2. (6P) *Differentialgleichungen:* Zwei maximale Lösungen der reellen DG $y''(x) + y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$ erfüllen $\alpha_1(x) = \cos x$ und $\alpha_2(x) = \sin x$.
   (a) (1P) Welche Definitionsbereiche D_1 und D_2 haben α_1 und α_2? Es gilt $D_1 =$ .... und $D_2 =$ ....
   (b) (1P) Rechnen Sie nach, dass α_1 Lösung ist. Welche Anfangssbedingung erfüllt α_2 im Punkt $x = \pi/2$?
   (c) *(2P) Die Wronskideterminante von (α_1, α_2) hat im Punkt $x \in \mathbb{R}$ den Wert
   $$\det\begin{pmatrix} \alpha_1(x) & \ldots\ldots \\ \alpha_1'(x) & \ldots\ldots \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
   (d) (2P) Geben Sie die maximale Lösung der DG $y''(x) + y(x) = 1$ auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 0 = y'(0)$ an.
   $$y(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. (5P) *Fourieranalysis:* Der Dirichletkern $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} e_k(x)$ ist für $n \in \mathbb{N}_0$ ein trigonometrisches Poylnom.
   (a) (1P) Geben Sie den Grad .... und eine Periode .... von D_n an. Ist D_n reellwertig? ....
   (b) (1P) Das Periodenmittel von D_n hat den Wert ....
   (c) (1P) Die Funktionen $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ sind orthonormiert, dh es gilt
   $$\langle e_k, e_q \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{iqx}\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
   (d) *(2P) Berechnen Sie
   $$\langle D_n, D_n \rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. (4P) *Vektoranalysis:* Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension und sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt von V. Für einen Vektor $k \in V$ gelte
   $$f : V \to \mathbb{R} \text{ mit } f(p) = |p|^2 \cdot \langle k, p \rangle.$$
   (a) (1P) Geben Sie für $p, X \in V$ die Zahl $d_p f(X) =$ .... an.
   (b) (1P) Die Richtungsableitung $[X]_p f$ ergibt sich aus $d_p f$ durch $[X]_p f =$ ....
   (c) (2P) Geben Sie für $p \in V$ den Vektor $grad_p(f) =$ .... an.