Vorlesungsprüfung Mathematische Methoden der Physik I — *Universität Innsbruck*
705.211 (VO3, Gebhard Grübl) — *2. Juli 2013, 10:15-11:45h*

Name:...Matrikelnr:...

*Ergänzen Sie den Text und geben Sie höchstens zwei A4 Blätter mit Nebenrechnungen ab. Keine Hilfsmittel außer Papier & Stift! Meteo-Studis ignorieren die mit * gekennzeichneten Fragen.*

---

1. *Wahrscheinlichkeit (6P)*

   Sei W die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1]$. Für den Erwartungswert und die Varianz der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,1]$ unter W gilt

   $$\langle f \rangle = \text{..........und } \mathcal{V}(f) = \text{..........}$$

   *Für die Verteilungsfunktion F_f von f unter W gilt

   $$F_f(x) = \text{......} \text{ für } x < 0, \;\; F_f(x) = \text{........} \text{ für } x \in [0,1] \;\text{ und } F_f(x) = \text{.......} \text{ für } x > 1$$

2. *Differentialgleichungen (6P)*

   Zwei linear unabhängige, maximale, reelle Lösungen der DG $y''(x)+y'(x)+y(x) = 0$ auf $\mathbb{R}$ ergeben sich aus dem Ansatz $y(x) = e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{C}$ durch die Bildung von Real- bzw Imaginärteil zu

   $$y_1(x) = \text{..................................} \qquad y_2(x) = \text{..................................}$$

   Der Vektorraum aller maximalen, reellen Lösungen der DG hat die Dimension .... Für die Lösung y mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ gilt

   $$y(x) = \text{.......................}$$

   *Die Umformung von $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$ in ein System erster Ordnung ergibt mit $y^1 = y$ und $y^2 = y'$

   $$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}(x).$$

3. *Fourierreihen (4P)*

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(x) = |\sin x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f gerade?...................... Die kleinste Periode von f ist .... Die Fourierreihe $P_n[f]$ von f konvergiert für $n \to \infty$ im quadratischen Mittel gegen f, dh es gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - P_n[f](x)|^2 \, dx = \text{..........}$$

   *Geben Sie den Koeffizienten a_k der Cos-reihe von f (zur Periode 2π) an.

   Hilfe: $\cos(\alpha)\sin(\beta) = [\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]/2$

   $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)\sin(x)\, dx = \text{...}$$

4. *Vektoranalysis (4P)*

   Sei $f : V \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \langle p, p \rangle$. Geben Sie an: $grad_p(f) = \text{...............}$

   *Sei $g : V \to \mathbb{R}$ mit $g(p) = \langle p, v \rangle \langle w, p \rangle$. Dabei sind $v, w \in V$ fest gewählt. Bestimmen Sie

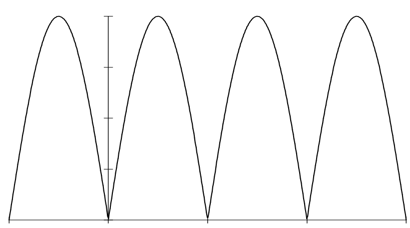
   $$grad_p(g) = \text{.......................}$$

Lösung:

1. Es gilt
$$\langle f\rangle = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$
und
$$\mathcal{V}(f) = \int_0^1 xdx - \langle f\rangle^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$
Die Verteilung ist definiert durch:
$$F_f(x) = W\left(\left\{\omega \in [0,1] : \sqrt{\omega} \leq x\right\}\right).$$
Daraus folgt für $x < 0$, dass $F_f(x) = W(\emptyset) = 0$ und für $x \in [0,1]$, dass $F_f(x) = W\left(\left[0, x^2\right]\right) = x^2$. Für $x > 1$ gilt $F_f(x) = W([0,1]) = 1$.

2. Der Ansatz löst die DG genau dann, wenn $a^2 + a + 1 = 0$. Die Lösungsmenge dieser Gl über $\mathbb{C}$ besteht aus den beiden Zahlen
$$a_\pm = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$
Zwei linear unabhängige komplexwertige maximale Lösungen sind daher:
$$y_\pm(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^{\pm i \frac{\sqrt{3}}{2} x}.$$
Zwei linear unabhängige reellwertige maximale Lösungen sind
$$C(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \text{ und } S(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$
Die Lösung mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ ist wegen $S(0) = 0$ und $C(0) = 1$ eine konstantes Vielfaches von S. Es gilt $S'(0) = \sqrt{3}/2$. Daher folgt für $x \in \mathbb{R}$
$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$
Umformung auf System 1. Ordnung:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}(x) &= \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ -y'(x) - y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}(x).\end{aligned}$$

3. f ist gerade wegen $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$. Die kleinste Periode von f ist π. Der Graph von f :



Da f über $[0, 2\pi]$ Riemannintegrierbar ist, gilt
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - P_n[f](x)|^2 dx = 0.$$

Es gilt für $k \in \mathbb{N}_0 \setminus 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)\right]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos((k-1)x)}{k-1} - \frac{\cos((k+1)x)}{k+1}\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1} - \frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1}\right]. \end{aligned}$$

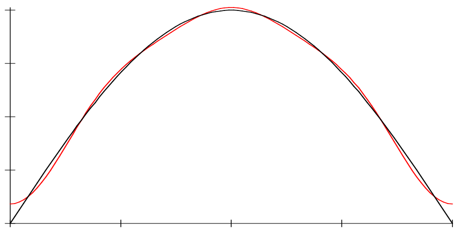
Für $k=1$ gilt $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx = 0$. Für gerade $k \in \mathbb{N}_0$ gilt somit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{k-1} - \frac{-2}{k+1}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right] = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{k^2-1}.$$

Für ungerade $k \in \mathbb{N}_0$ hingegen gilt $a_k = 0$. Es gilt somit

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

Die Figur zeigt die Funktion $|\sin(x)|$ und ihr Fourierpolynom vom Grad 6.



4. Es folgt aus $d_p f(X) = 2\langle p, X\rangle$, dass $grad_p(f) = 2p$. Aus $d_p\langle v,\cdot\rangle = \langle v,\cdot\rangle$ folgt mit der Produktregel $grad_p(g) = v\langle w,p\rangle + w\langle p,v\rangle$.