Name:..Matrikelnr:.........................Studium..........................

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................
*Studierende der Atmosphärenwissenschaften können mit * markierte Beispiele ignorieren!*

Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}$ sei L_f die Menge aller Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y''(t) - \kappa^2 y(t) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

1. (10P) Für $f = 0$ ist $L_f = L_0$ also die Menge aller maximalen Lösungen von $y'' - \kappa^2 y = 0$.
   (a) (1P) Gibt es in L_0 konstante Funktionen? Wenn ja, welche?
   (b) (2P) Bestimmen Sie $\alpha_1 \in L_0$ mit $\alpha_1(0) = 1$ und $\alpha_1'(0) = \kappa$. *Hinweis: Versuchen Sie den reellen Exponentialansatz* $y(t) = e^{at}$ mit $a \in \mathbb{R}$.
   (c) (2P) Bestimmen Sie $\alpha_2 \in L_0$ mit $\alpha_2(0) = 1$ und $\alpha_2'(0) = -\kappa$.
   (d) (2P) Wie drückt sich L_0 durch die Funktionen α_1, α_2 aus?
   (e) (2P) Geben Sie die Menge aller beschränkten $y \in L_0$ an.
   (f) (1P) Geben Sie die Menge aller geraden Funktionen in L_0 an.

2. (5P) Sei $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f(t) = \sin(\omega t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
   (a) (2P) Bestimmen Sie ein $C \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_p(t) = C \sin(\omega t)$ ein Element von L_f ist.
   (b) (2P) *Gibt es in L_f eine gerade Funktion?
   (c) (1P) Geben Sie die Menge aller beschränkten Funktionen in L_f an.

3. (3P) Sei $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) =: g(\omega t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
   (a) (1P) Zeigen Sie, dass g ein trigonometrisches Polynom ist. Welchen Grad hat g?
   (b) (1P) Welchen Wert hat die kleinste Periode von g?
   (c) (1P) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k, b_k der Zerlegung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$

4. *(2P) Sei f ein trigonometrische Polynom des Typs

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$

   (a) (1P) Bestimmen Sie ein $y_p \in L_f$ mit

$$y_p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)\right).$$

   (b) (1P) Welches $y_p \in L_f$ ergibt sich im Fall f aus Bsp 3?

Lösung

1a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Ein $y \in L_0$ erfüllt genau dann $y(t) = c$ für alle t, wenn $-\kappa^2 c = 0$, also genau dann wenn $c = 0$. Die einzige konstante Funktion in L_0 ist somit die Nullfunktion.

1b,c) Der Ansatz $y(t) = e^{at}$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann in L_0, wenn

$$a^2 e^{at} - \kappa^2 e^{at} = 0,$$

also für $a \in \{\kappa, -\kappa\}$. Damit sind $y_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y_\pm(t) = e^{\pm\kappa t}$ zwei linear unabhängige Lösungen der DG zu $f = 0$. Es gilt $y_\pm(0) = 1$ und $y'_\pm(0) = \pm\kappa$. Somit gilt $\alpha_1 = y_+$ und $\alpha_2 = y_-$.

1d) Es gilt $L_0 = \mathbb{R} \cdot \alpha_1 + \mathbb{R} \cdot \alpha_2$.

1e) Die Lösung α_1 ist auf $\mathbb{R}_{<0}$ beschränkt und auf $\mathbb{R}_{>0}$ unbeschränkt. Die Lösung $\alpha_2 = \Pi\alpha_1$ ist auf $\mathbb{R}_{>0}$ beschränkt und auf $\mathbb{R}_{<0}$ unbeschränkt. Daher ist eine reelle Linearkombination $A\alpha_1 + B\alpha_2$ genau dann beschränkt, wenn $A = B = 0$. Die einzige beschränkte Funktion in L_0 ist die Nullfunktion.

1f) Eine Funktion $y = A\alpha_1 + B\alpha_2$ ist genau dann gerade, erfüllt also $\Pi y = y$ genau dann, wenn $A\alpha_1 + B\alpha_2 = A\alpha_2 + B\alpha_1$. Koeffizientenvergleich ergibt $A = B$. Die Menge aller geraden Funktionen in L_0 ist somit durch $\mathbb{R} \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)$ gegeben. Beachte $(\alpha_1 + \alpha_2)(t) = 2\cosh(\kappa t)$.

2a) der Ansatz $y_p(t) = C\sin(\omega t)$ ist genau dann in L_f, wenn

$$-C\omega^2 \sin(\omega t) - \kappa^2 C \sin(\omega t) = \sin(\omega t),$$

also für $C = -1/\left(\omega^2 + \kappa^2\right)$. Es gilt also $y_p(t) = -\sin(\omega t)/\left(\omega^2 + \kappa^2\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2b) Für eine Funktion $y \in L_f$ gilt

$$y''(t) - \kappa^2 y(t) = \sin(\omega t).$$

Daraus folgt für die gespiegelte Funktion Πy

$$(\Pi y)''(t) - \kappa^2 (\Pi y)(t) = y''(-t) - \kappa^2 y(-t) = -\sin(\omega t).$$

Aus $y = \Pi y$ folgt daher für alle t, dass $-\sin(\omega t) = \sin(\omega t)$, oder äquivalent dazu $\sin x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit kann es keine gerade Funktion in L_f geben.

2c) Es gilt $L_f = y_p + L_0$. Da einerseits y_p beschränkt ist und andererseits in L_0 nur die Nullfunktion beschränkt ist, ist y_p die einzige beschränkte Funktion in L_f.

3a) Es gilt

$$g(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^{2ix} + 1 - 1 - e^{-2ix}}{2i} = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

g ist somit ein trigonometrisches Polynom vom Grad 2.

3b) Die kleinste Periode von g ist π.

3c) f hat die Zerlegung

$$f(t) = g(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right),$$

mit $a_k = 0$ für alle $k \in \{0, 1, 2\}$ und $b_1 = 0, b_2 = 1/2$.

4a) Einsetzen des Ansatzes in die DG zeigt durch Koeffizientenvergleich, dass $-\left(k^2\omega^2 + \kappa^2\right) A_k = a_k$ und $-\left(k^2\omega^2 + \kappa^2\right) B_k = b_k$ und somit

$$y_p(t) = -\frac{a_0}{2\kappa^2} - \sum_{k=1}^{2} \frac{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)}{k^2\omega^2 + \kappa^2}.$$

4b) Es gilt

$$y_p(t) = -\frac{\sin(2x)}{2\left(4\omega^2 + \kappa^2\right)}.$$