

Niveaumenge, Richtungsableitung

- Skizzieren Sie die Niveaumengen $N_p[f] = \{q \in \mathbb{R}^2 : f(q) = f(p)\}$ von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu den Punkten $p \in S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1)\}$ für
 - $f(x, y) = x$,
 - $f(x, y) = x + y$,
 - $f(x, y) = x - y$,
 - $f(x, y) = x^2 + y^2$,
 - $f(x, y) = x^2 - y^2$,
 - $f(x, y) = xy$.
- Berechnen Sie die Richtungsableitung $[X]_p f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(p + \varepsilon X) - f(p)) / \varepsilon$ der Funktionen f aus Bsp 1 im Punkt $p = (1, 1)$ unter dem Vektor $X = (1, -1)$. Prüfen Sie, ob $[X]_p f = 0$, wenn X in p tangential an die Niveaulinie $N_p[f]$ liegt.
- Ein Cruise Missile (CM) fliegt gemäß der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (ct, a, h)$ mit einer Geschwindigkeit $c > 0$ und Zielfehler $a \neq 0$ in der Höhe $h > 0$ über ebenem Grund. Für das Bodenradar im Punkt $(0, 0, 0)$ hat ein Punkt (x, y, z) mit $x^2 + y^2 > 0$ den Höhenwinkel

$$\theta(x, y, z) = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wie schnell ändert sich der Höhenwinkel $\theta \circ \gamma$ des CMs zur Zeit t ? Lösung:

$$\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t) = [\dot{\gamma}(t)]_{\gamma(t)} \theta = c \left. \frac{\partial \theta(x, y, z)}{\partial x} \right|_{\gamma(t)} = -\frac{c^2 t}{c^2 t^2 + a^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{c^2 t^2 + a^2}}.$$

Fig. 1 zeigt $\frac{d(\theta \circ \gamma)}{dt}(t)$ als Funktion der Zeit in Sekunden für $a = 1$ Längeneinheit, $h = 10 \cdot a$ bei $c = 1 \cdot a/s$ (schwarz) bzw $c = 2 \cdot a/s$ (grün).

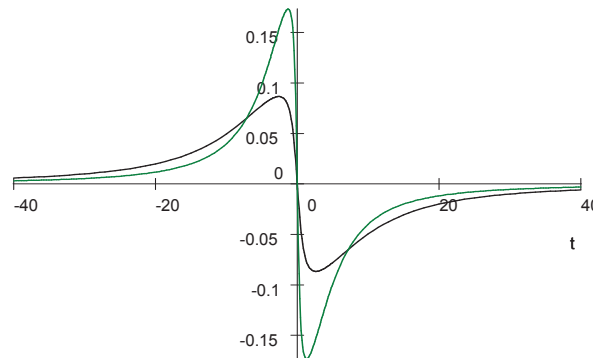
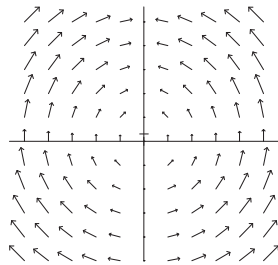


Figure 1: $\dot{\theta}$ in rad/s für $a = 1$ und $h = 10$ bei $c = 1/s$ (schwarz) und bei $c = 2/s$ (grün)

- Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit den Elementen k, e . Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eines der Skalarprodukte von V und $r := |\cdot|$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie:
 - Gilt $f(p) := \langle k, p \rangle^2$ für alle $p \in V$, dann folgt $[X]_p(f) = 2 \langle k, p \rangle \langle k, X \rangle$ für alle $X, p \in V$.
 - Gilt $f := -\frac{1}{r}$ auf $U = V \setminus 0$, dann folgt $[X]_p(f) = \frac{\langle p, X \rangle}{|p|^3}$ für alle $p \in U$ und für alle $X \in V$.
 - Gilt $e \in V$ und $f(p) = \frac{\langle e, p \rangle}{|p|}$ für alle $p \in U = V \setminus 0$, dann folgt $\forall p \in U$ und $\forall X \in V$:

$$[X]_p(f) = \frac{|p|^2 \langle e, X \rangle - \langle e, p \rangle \langle p, X \rangle}{|p|^3}.$$

Die Zahl $f(p)$ ist für $|e| = 1$ der Kosinus des Winkels zwischen e und p . Die nachfolgende Figur zeigt das (stetige!) Vektorfeld $Y = (-xy, x^2)$ auf \mathbb{R}^2 . Zeigen Sie für $V = \mathbb{R}^2$ und $e = e_2$, dass $[X]_p(f) = \langle Y(p), X \rangle / |p|^3$, wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt von \mathbb{R}^2 ist.



Das Vektorfeld $(-xy, x^2)$