Eigenschaften der Fouriertransformation illustriert am Rechteckpuls

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ sonst.

   (a) Zeigen Sie für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ von f, dass $(\mathcal{F}f)(0) = \sqrt{2/\pi}$ und
   $$(\mathcal{F}f)(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} \text{ für } k \in \mathbb{R} \smallsetminus 0.$$
   $\mathcal{F}f$ ist also reellwertig und gerade. Warum muss das so sein? Ist $\mathcal{F}f$ stetig? Ist $\mathcal{F}f$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion? Überprüfen Sie, ob $|(\mathcal{F}f)(k)| \leq (\mathcal{F}|f|)(0)$ für alle $k \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Fig 1 zeigt den Graphen der Funktion $(\sin x)/x$ und ihr Quadrat auf $[-10\pi, 10\pi]$.

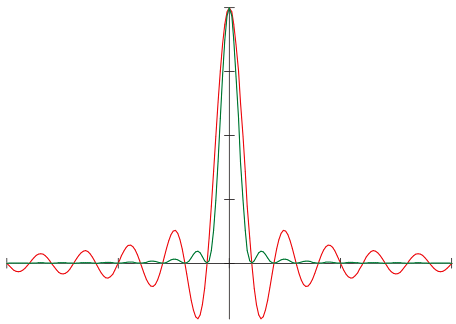

Figure 1: Die Funktionen $(\sin x)/x$ (rot) und $((\sin x)/x)^2$ (grün)

   (b) Zeigen Sie mit Plancherels Formel $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(k)|^2 \, dk$, dass
   $$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$
   Zeigen Sie durch Anwendung von Parsevals Formel auf f und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-\lambda|x|}$ für ein $\lambda > 0$, dass
   $$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x} \sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\lambda dx}{\lambda^2 + x^2} = \arctan(1/\lambda).$$
   Beachten Sie: durch Grenzübergang $\lambda \to 0$ folgt daraus $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Überprüfen Sie Plancherels Formel an g. *Hinweis:* $(\mathcal{F}g)(k) = \sqrt{2/\pi}\lambda / \left(\lambda^2 + k^2\right)$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

   (c) Seien $\xi, L \in \mathbb{R}$ und $L > 0$. Drücken Sie $\mathcal{F}g$ für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(\frac{x-\xi}{L})$ durch $\mathcal{F}f$ aus.

   (d) Berechnen Sie $\mathcal{F}g$ mittels partieller Integration für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = xf(x)$ und überprüfen Sie, ob $\mathcal{F}g = i(\mathcal{F}f)'$.

   (e) Zeigen Sie, dass die (wegen $\mathcal{F}f \notin R$ zweifelhafte Anwendung der) Fourierumkehr $(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$ die folgende erstaunliche (und auch korrekte) Integralformel ergibt
   $$\int_0^\infty \cos(kx) \frac{\sin k}{k} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}.$$
   Nachbemerkung ohne Beweis: Im Grenzfall $x = 1$ gilt $\int_0^\infty \cos(k) \frac{\sin k}{k} dk = \pi/4$.