Name:..Matrikelnr:.........................Studium..........................

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................
Studierende der Atmosphärenwissenschaften können Beispiel 4) ignorieren!

---

1. (8P) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos^2 x$.
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass die Funktion f ein trigonometrisches Polynom ist.
   (b) (1P) Welchen Grad n hat f und für welche Zahlen a_k und b_k gilt
   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}?$$
   (c) (1P) Hat f auch eine Periode kleiner als 2π? Wenn ja, welche?
   (d) (1P) Ist f gerade / ungerade / weder noch?
   (e) (2P) Geben Sie den maximalen und den minimalen Wert von f an. Wo werden diese Werte angenommen?
   (f) (1P) Welches Periodenmittel hat f?

2. (6P) Sei L die Menge aller Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $$y''(x) + y(x) = \sin^2(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$
   (a) (3P) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $y_p(x) = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos(2x)$ ein Element $y_p \in L$. *Hinweis:* $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.
   (b) (3P) Bestimmen Sie die Funktion $y \in L$ mit $y(0) = y'(0) = 0$.

3. (4P) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \exp(ix/2)$ für $x \in [0, 2\pi)$ sei 2π-periodisch.
   (a) (2P) Skizzieren Sie die Graphen von $\Im f$ über dem Bereich $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) (2P) Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten $c_k = \langle e_k, f \rangle$.

4. *(2P) Sei $a \in \mathbb{R}$. Hat die DG
   $$y''(x) + y(x) + a y^3(x) = \sin^2(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
   eine ungerade Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit einem symmetrischen Intervall $I = -I$? *Hinweis:* Versuchen Sie *nicht* die DG zu lösen, sondern überlegen Sie welche DG die Funktion $(\Pi y)(x) = y(-x)$ erfüllt.

Lösung

1a) Es gilt

$$f(x) = \cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Damit ist f ein trigonometrisches Polynom.

1b) Es gilt nach 1a)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

für $n = 2$ und $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1/2$. Die Konstanten b_i erfüllen $b_1 = 0 = b_2$.

1c) f hat auch die Periode π.

1d) f ist gerade.

1e) $\max f = 1$ und $\min f = 0$. Das Maximum wird in den Punkten $x = n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ angenommen. Das Minimum wird in $x = (2n+1)\pi/2$ mit $n \in \mathbb{Z}$ angenommen.

1f) Das Periodenmittel ist

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}.$$

2a) Einsetzen des Ansatzes in die DG ergibt

$$(-4a_2 \cos(2x)) + \left(\frac{a_0}{2} + a_2 \cos(2x)\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $a_0 = 1$ und $-3a_2 = -1/2$. Somit gilt

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos(2x)}{3}\right).$$

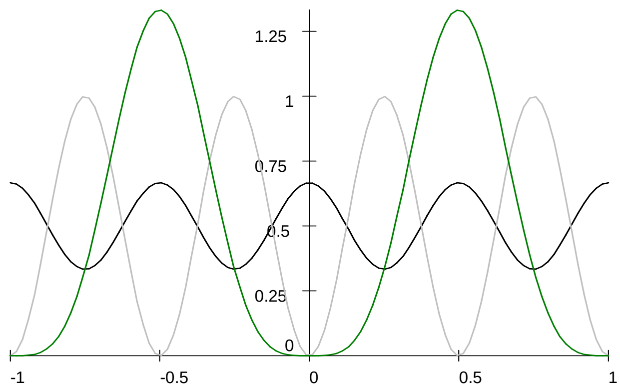

Figure 1: $y_p(2\pi x)$ (schwarz), $y(2\pi x)$ (grün) und $\sin^2(2\pi x)$ (grau)

Die kleinste Periode von y_p ist π. Siehe Figur 1.

2b) Für jedes Element $y \in L$ existieren Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$, sodass

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + y_p(x).$$

Es gilt $y_p(0) = 2/3$ und $y_p'(0) = 0$. Die Anfangsvorgabe erfüllt y somit genau dann, wenn $A = -2/3$ und $B = 0$. Daher gilt

$$y(x) = -\frac{2}{3}\cos(x) + y_p(x) = -\frac{2}{3}\cos(x) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos(2x)}{3}\right).$$

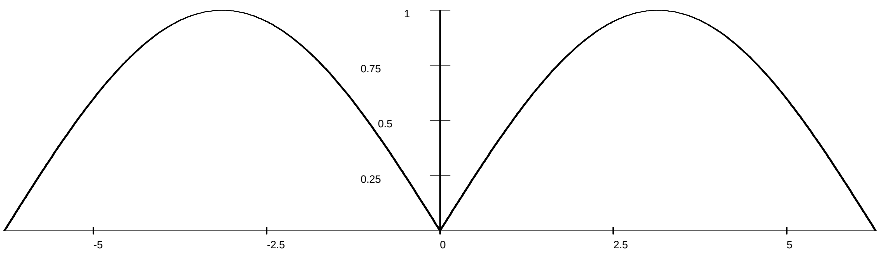

Figure 2: $|\sin(x/2)|$

3a) Es gilt $\Im e^{ix/2} = \sin(x/2)$ für $x \in [0, 2\pi]$ und daher $\Im f = |\sin(x/2)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Siehe Figur 2.
3b) Es gilt für $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 2\pi c_k &= \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{i\frac{x}{2}} \, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(1-2k)\frac{x}{2}} \, dx = \left. \frac{e^{i(1-2k)\frac{x}{2}}}{i(1-2k)\frac{1}{2}} \right|_0^{2\pi} = 2\frac{e^{i(1-2k)\pi} - 1}{i(1-2k)} \\ &= 2\frac{-1-1}{i(1-2k)} = \frac{4i}{1-2k}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$c_k = \frac{2i}{\pi(1-2k)}.$$

4) Ist $y : I \to \mathbb{R}$ für ein Intervall I mit $I = -I$ eine Lösung, dann ist die Funktion $\Pi y : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung, da $\sin^2$ gerade ist. Ist y ungerade, dann wäre wegen $\Pi y = -y$ auch die Funktion $-y$ eine Lösung der DG. Dies zieht aber den Widerspruch nach sich, dass $\sin^2 = -\sin^2$. Somit existiert keine ungerade Lösung.