Fourierreihen: Schwingungsanregung durch Sägezahnfunktion

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = |x|$ für $-\pi < x \leq \pi$. Obwohl eine Potenzreihenentwicklung von f um 0 nicht existiert, können Sie folgendes ausführen:

   (a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)dx$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und damit die F-Reihe von f. *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2k+1)x\right]}{(2k+1)^2}.$$

   Figur 1 zeigt die Partialsummen dieser Fourierreihe für $k \in \{0,1\}$ (in schwarz) und $k \in \{0,1,2\}$ (in rot) und die Grenzfunktion (in grau).

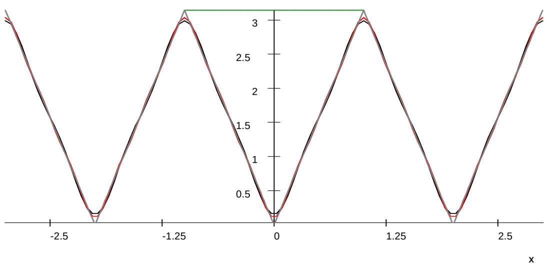

Figure 1: Fourierpolynome von $x \mapsto |\pi x|$ (auf $-3 < x < 3$) vom Grad 3 bzw 5 (rot)

   (b) Geben Sie die Fourierreihe einer 2π-periodische Lösung y_p von $y'' + \frac{1}{2}y = f$ an. Gibt es mehr als eine 2π-periodische Lösung dieser DG? *Hinweis:* Setzen Sie eine Fourierreihenlösung in die DG ein und machen Sie einen Koeffizientenvergleich. *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y_p(x) = \pi + \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(2k+1)^2 - 1}\frac{\cos\left[(2k+1)x\right]}{(2k+1)^2}.$$

   Siehe Figur 2; die Genauigkeit der Graphik unterscheidet die Partialsummen mit $k = 0$ und jene mit $k = 0, \ldots N > 0$ nicht. *Moral:* die Näherung $y_p(x) \approx \pi + \frac{8}{\pi}\cos x$ erfasst die wesentlichen Züge von y_p. Welchen Wert hat das Zeitmittel von y_p über eine Periode?

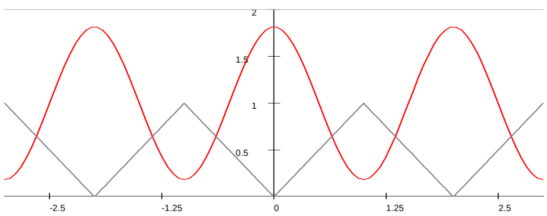

Figure 2: Fourierpolynom vom Grad 5 von $x \mapsto y_p(\pi x)/\pi$ (rot) und $x \mapsto f(\pi x)$ (grau)

   Freiwilliger Zusatz: Zeigen Sie, dass für $x \in [-\pi, \pi]$

$$y_p(x) = 2\left(|x| - \sqrt{2}\sin\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right)\right) + 2\sqrt{2}\frac{1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

(c) Aus der Konvergenz der F-Reihe von f im Punkt $x = 0$ folgt $\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-2} = ?$

(d) *Bestimmen Sie durch Schieben die F-Reihe der ungeraden(!) Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$. *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}.$$

(e) Freiwillig: Bestimmen Sie die gerade maximale Lösung y_+ von $y'' + y = f$ mit $y_+(0) = 0$. Hat diese DG eine 2π-periodische Lösung? *Lösung:* Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_+(x) &= -\frac{2}{\pi} x \sin x - C \cos x + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{\left((2k+1)^2 - 1\right)(2k+1)^2}. \\ \text{mit } C &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - (2k+1)^2\right)(2k+1)^2} \approx \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Figur 3 zeigt die Partialsumme über $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ von $x \mapsto y_+(\pi x)$ (rot) und $x \mapsto f(\pi x)$ (grau). Die Graphik unterscheidet die Partialsumme nicht von der Approximation

$$y_+(x) \approx -\frac{2}{\pi} x \sin x + \frac{\pi}{2}(1 - \cos x).$$

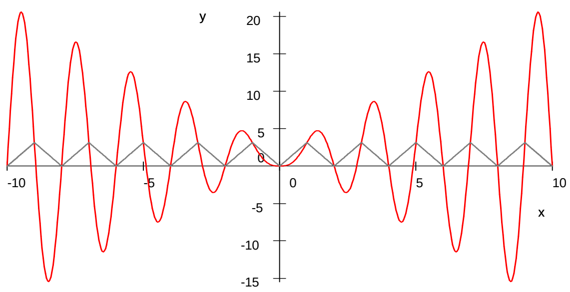

Figure 3: Schwingung $y_+(\pi x)$ (rot) und Sägezahnanregung (grau)