Legendrepolynome, Trigonometrische Polynome

1. Berechnen Sie für $\lambda = 30$ die ungerade Lösung $y_- : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $y'_-(0) = 1$ der Legendre DG
$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0.$$
   (a) Zeigen Sie $y_-(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$ für alle $x \in (-1,1)$.
   (b) *Zeigen Sie für das Legendrepolynom P_5, dass $P_5(x) = \frac{15}{8}y_-(x)$. *Hinweis:* Führen Sie P_5 mit der Rekursion $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ auf die im Skriptum angegebenen Funktionen P_4 und P_3 zurück.

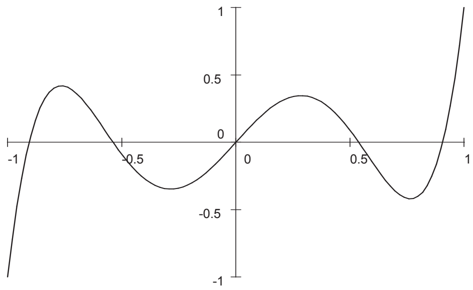

Figure 1: Das Legendrepolynom P_5

2. Rechnen Sie unter Verwendung von $\cos^3(x) = [\exp(ix) + \exp(-ix)]^3/8 = \ldots$ nach, dass $\cos^3$ ein trigonometrisches Polynom vom Grad 3 ist. Für welche $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ gilt
$$\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{3} b_k \sin(kx) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}?$$
   Für welches reelle Polynom T_3 gilt $\cos(3x) = T_3(\cos(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$?[1] *Lösung:* $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

3. Für welche π-periodische Funktion y gilt $y''(x) + y(x) = \cos^3(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?
   Lösung: $y(x) = -\left(\cos(2x) + \frac{1}{35}\cos(6x)\right)/4$.

4. Für $\gamma = (x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gelte $x(t) = 2\sin t$ und $y(t) = \sin(2t)/2$. Die Menge $\gamma(\mathbb{R})$ ist eine Lissajousfigur.[2] (Siehe Figur 3.) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $|\gamma|^2, |\dot{\gamma}|^2$ und $|\ddot{\gamma}|^2$ trigonometrische Polynome sind. Welchen Grad und welche Koeffizienten a_k, b_k haben sie? (Siehe Figur 4.)

[1] Allgemeiner gilt $\cos nx = T_n(\cos x)$ mit dem Chebyshev-Polynom T_n für $n \in \mathbb{N}_0$.
[2] Die Kurve $\gamma = (x,y)$ ist eine Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen eines anisotropen, 2d harmonischen Oszillators da ja $x'' = -x$ und $y'' = -4y$. Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Lissajous-Figur

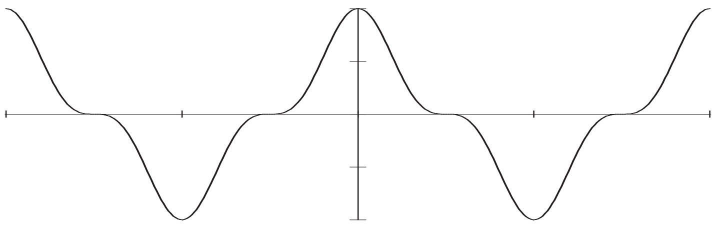

Figure 2: $\cos^3$ auf $[-2\pi, 2\pi]$

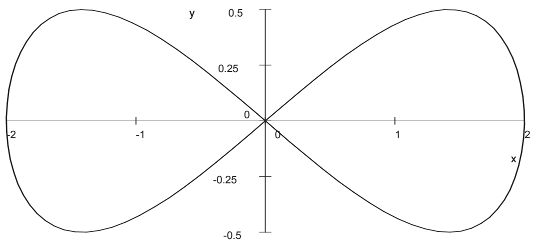

Figure 3: Bahn von γ

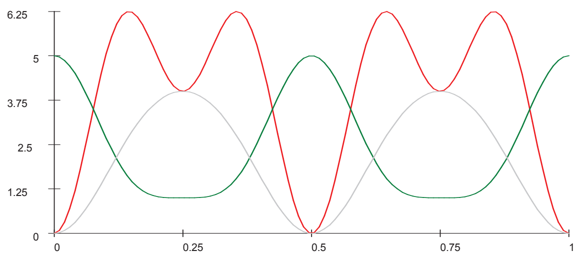

Figure 4: $|\gamma|^2$, (grau), $|\dot{\gamma}|^2$ (grün) und $|\ddot{\gamma}|^2$ (rot) als Funktion von $t/2\pi$