Lineare DGen: Der Nutzen von Symmetrien

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (evt uneigentliches) Intervall, das unter der Abbildung $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\pi(x) = -x$ invariant ist, dh es gilt: $x \in I \Rightarrow \pi(x) \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt gerade, falls $f \circ \pi = f$, und ungerade, falls $f \circ \pi = -f$.

   (a) Zeigen Sie: f ungerade $\Rightarrow f(0) = 0$.

   (b) Sei $f \in C^1(I : \mathbb{R})$. Zeigen Sie: ($f$ gerade $\Rightarrow f'$ ungerade) und: (f ungerade $\Rightarrow f'$ gerade).

   (c) Sei $D : C^1(I : \mathbb{R}) \to C(I : \mathbb{R})$ mit $Df = f'$ und sei $\Pi : C^1(I : \mathbb{R}) \to C^1(I : \mathbb{R})$ mit $\Pi f = f \circ \pi$. Zeigen Sie, dass Π und D linear sind, und dass: $\Pi \circ \Pi = \iota d$ und $D \circ \Pi = -\Pi \circ D$ gilt.

2. Warum sind alle maximalen Lösungen der DG $y'(x) = \sin(x)\, y(x)$ auf $\mathbb{R}$ gerade? Warum ist nur die 0-Lösung ungerade? Funktionieren analoge Überlegungen für die maximalen Lösungen von $y'(x) = \cos(x)\, y(x)$ auf $\mathbb{R}$?

3. *Sei L der VR der maximalen Lösungen der DG

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0 \text{ für alle } x \in I,$$

   wobei das Inervall I invariant unter π ist. Die stetigen Funktionen a bzw $b : I \to \mathbb{R}$ seien ungerade bzw gerade. Zeigen Sie:

   (a) $\alpha \in L \Rightarrow \Pi\alpha \in L$. Kurznotation dafür: $\Pi(L) \subset L$.

   (b) $\alpha \in L$ mit $\alpha'(0) = 0 \Rightarrow \alpha$ ist gerade. (Hinweis: $(\Pi\alpha)(0) =?, (\Pi\alpha)'(0) =?$ Was sagt der Eindeutigkeitssatz dazu?)

   (c) $\alpha \in L$ mit $\alpha(0) = 0 \Rightarrow \alpha$ ist ungerade. (Hinweis: $(-\Pi\alpha)(0) =?, (-\Pi\alpha)'(0) =?$ Was sagt der Eindeutigkeitssatz dazu?)

   (d) $\alpha \in L \Rightarrow$ Es existert genau eine gerade Funktion $\alpha_+ \in L$ und genau eine ungerade Funktion $\alpha_- \in L$ mit $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$.

   (e) Die Schwingungsgleichung, die Legendresche und die Hermitesche DG sind vom genannen Typ.

4. Sei für ein $\omega > 0$ die Zahl $T = 2\pi/\omega$. Sei L die Menge aller maximalen Lösungen y der DG

$$y''(x) + y(x) = \sin(\omega x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Zeigen Sie für $T_k : C(\mathbb{R} : \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ mit $(T_k f)(x) = f(x - kT)$ und $k \in \mathbb{Z}$, dass $T_k L \subset L$. Die Verschiebungen T_k sind also ebenso wie die Abbildung $-\Pi : C(\mathbb{R} : \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ mit $(-\Pi f)(x) = -f(-x)$ Symmetrien der DG (1).

   (b) Berechnen Sie $y \in L$ mit $y(0) = 0 = y'(0)$. Hat y die Periode T? Besitzt die DG Lösungen der Periode T? *Hinweis:* Zeigen Sie, dass y ungerade ist und machen Sie dann den (erheblich vereinfachten) Exponential-Lösungsansatz $y = C \sin \omega x$ für $\omega \neq 1$ bzw $y = Cx \cos x$ für $\omega = 1$, jeweils mit $C \in \mathbb{R}$. *Lösung:* für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega x) - \omega \sin(x)}{1-\omega^2} & \text{für } \omega \neq 1 \\ \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x) & \text{für } \omega = 1 \end{cases} .$$