Proseminar Mathematische Methoden der Physik I — *Universität Innsbruck*
Aufgabenblatt 7, 4. Mai 2015 — *Erste Klausur*

Name:...*Matrikelnr:*.........................*Studium*..........................

Zahl der abgegebenen Blätter (inklusive Angabeblatt)..................

---

1. (10P) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y^2$. Beantworten Sie (mit nachvollziehbarer Begründung!) für die DG $y' = f(x, y)$ die folgenden Fragen.
   (a) (1P) Hat sie konstante Lösungen? Falls Ja, welche?
   (b) (1P) Wie sieht ihr Richtungsfeld aus? (Skizze)
   (c) (2P) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung. Ist dann die Funktion $\beta : I + a \to \mathbb{R}$ mit $\beta(x + a) = \alpha(x)$ auch eine Lösung?
   (d) (2P) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung. Ist dann die Funktion $\beta : -I \to \mathbb{R}$ mit $\beta(x) = -\alpha(-x)$ auch eine Lösung?
   (e) (4P) Welche maximale Lösung $\alpha : I \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(0) = 1$ hat sie? Geben Sie auch I an!

2. (3P) Seien $\omega, \Omega \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\omega \neq \Omega$. Bestimmen Sie eine periodische Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \cos(\Omega t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

   mittels des Ansatzes $y(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ mit $A, B \in \mathbb{R}$.

3. (3P) Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe zur Standardbasis die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix von

$$e^{tA} = \iota d + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

   Hinweise: i) A^2 hat welche Matrix? ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh t$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh t$.

4. *(4P) Sei A wie in Bsp 3).
   (a) (2P) Das 2d-System erster Ordnung $\dot{\gamma} = A\gamma$ ist mit $\gamma = (x, y) : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^2$ welcher DG zweiter Ordnung für x äquivalent? Hinweis: Aus $\dot{\gamma} = A\gamma$ folgt $\dot{x}(t) =$? und weiter $\ddot{x}(t) =$?
   (b) (2P) Für die Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $2H(x, y) = y^2 - x^2$ folgt

$$(\partial_y H(x, y), -\partial_x H(x, y)) = (y, x) = A(x, y)$$

   und daher

$$\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = ?$$

Lösung

1. Die Differentialgleichung $y' = y^2$ ist vom Typ getrennter Variablen, nichtlinear und autonom.

   (a) Der Lösungsansatz $y(x) = c$ für alle x in einem reellen Intervall I liefert eine Lösung genau dann, wenn $0 = c^2$, also für $c = 0$. Also sind $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = 0$ die einzigen konstanten Lösungen. Die einzige konstante maximale Lösung ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = 0$.

   (b) Ihr Richtungsfeld ist in x-Richtung verschiebungsinvariant, hat überall positiven Anstieg. Dieser nimmt mit y quadratisch zu.

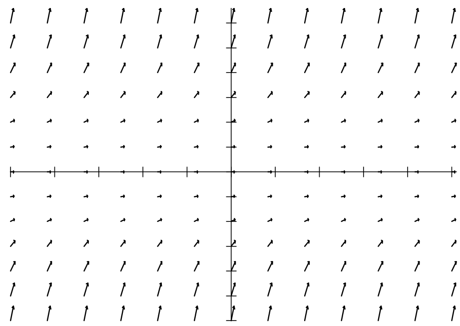

Figure 1: Das Vektorfeld $\left(1, y^2\right)$

   (c) Da die DG autonom ist, sind alle Translate einer Lösung auch Lösungen.

   (d) Es gilt $\beta'(x) = \alpha(-x)$ und $\beta(x)^2 = \alpha(-x)^2$. Aus $\alpha'(x) = \alpha^2(x)$ folgt somit $\beta'(-x) = \beta(-x)^2$. Damit ist β Lösung mit dem Defbereich $-I$.

   (e) Eine Lösung α mit $\alpha(0) = y_0 > 0$ erfüllt für alle x in ihrem Def-bereich mit der Stammfunktion $\Phi_{\mathbb{R}_{>0}}(y) := -1/y < 0$ von $1/h(y) = 1/y^2$

   $$\Phi_{\mathbb{R}_{>0}}(\alpha(x)) = x + c < 0,$$

   also

   $$-\frac{1}{\alpha(x)} = x + c.$$

   Der Wert von c ergibt sich aus $\alpha(0) = y_0$ zu

   $$-\frac{1}{y_0} = c.$$

   Somit gilt

   $$\alpha(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{y_0}} = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x}.$$

   Der maximale Definitionsbereich I erfüllt

   $$I = \{x \in \mathbb{R} : x + c < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/y_0\} = (-\infty, 1/y_0).$$

   Somit gilt

   $$\alpha : I = (-\infty, 1/y_0) \to \mathbb{R} \text{ und } \alpha(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x}.$$

   Der gefragte Fall ergibt sich daraus durch die Wahl $y_0 = 1$.

2. Der Ansatz löst die DG genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

   $$\left(-\Omega^2 + \omega^2\right)\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) = \cos(\Omega t).$$

   Die ist genau dann der Fall, wenn $\left(-\Omega^2 + \omega^2\right) A = 1$ und $\left(-\Omega^2 + \omega^2\right) B = 0$. Die gesuchte Lösung erfüllt also

   $$y(t) = \frac{\cos(\Omega t)}{\omega^2 - \Omega^2} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

3. Es gilt $A^2 = \iota d$ und daher

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \iota d + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}\iota d + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}A \\ &= \sinh(t) \cdot A + \cosh(t) \cdot \iota d. \end{aligned}$$

4. Es gilt $\dot{\gamma} = A\gamma$ oder explizit

   (a) $(\dot{x}, \dot{y}) = (y, x)$. Daraus folgt $\ddot{x} = \dot{y} = x$, also $\ddot{x} - x = 0$.

   (b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= \partial_x H(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \partial_y H(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \\ &= \partial_x H(x(t), y(t)) \cdot \partial_y H(x(t), y(t)) - \partial_y H(x(t), y(t)) \cdot \partial_x H(x(t), y(t)) = 0. \end{aligned}$$