Lineare DGen 2. Ordnung: 'Kraftstoß' auf 1d Teilchen, Eulersche DG

1. Seien $B \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie die (maximale) Lösung α mit $\alpha(-T/2) = \dot{\alpha}(-T/2) = 0$ von

$$\ddot{x}(t) = \begin{cases} B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & \text{für } -\pi < \frac{2\pi}{T}t < \pi \\ 0 & \text{für } t \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \end{cases}.$$

   Die zugehörige Physikaufgabe: Einem anfangs in 0 ruhenden Teilchen, das sich nur auf einer Geraden bewegen kann, wird für die Dauer einer Periode eine Sinus-Kraft aufgeprägt. Wo ist das Teilchen zur Zeit t? Bewegt es sich nach Abschluss der Krafteinwirkung weiter?

2. (Freiwillig) Jetzt stellen wir die Frage von Bsp 1 für einen (ungedämpften) harmonischen Oszillator. Zunächst halten wir die Details der Kraft unbestimmt. Es wird nur vorausgesetzt, dass die Krafteinwirkung außerhalb eines endlichen Zeitintervalls verschwindet. Also: Die stetige Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $b(t) = 0$ für alle $t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Sei $\gamma_{ret} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die maximale Lösung von

$$\dot{\gamma}(t) = -i\omega\gamma(t) + \frac{i}{\omega}b(t)$$

   mit $\gamma_{ret}(t_0) = 0$ für ein $t_0 < -T/2$. Diese komplexe DG ist über $\gamma = x + i\dot{x}/\omega$ mit $x = \Re\gamma$ äquivalent zu $\ddot{x} + \omega^2 x = b$. (Siehe VO; es sei $\omega > 0$.)

   (a) Die (komplexe) Variation der Konstantenformel besagt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\gamma_{ret}(t) = \frac{i}{\omega}\int_{t_0}^{t} e^{-i\omega(t-s)} b(s)\, ds. \tag{1}$$

   Prüfen Sie, ob Gl (1) tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ergibt.

   (b) Zeigen Sie $\gamma_{ret}(t) = 0$ für alle $t < -T/2$. Zeigen Sie für $t > T/2$

$$\gamma_{ret}(t) = i\frac{C_\omega}{\omega}e^{-i\omega t} \text{ mit } C_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} b(s)\, e^{i\omega s} ds.$$

   (c) Sei nun $b(t) = B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ für $-T/2 < t < T/2$ mit $B \in \mathbb{R}$. Geben Sie $x_{ret}(t) = \Re\gamma_{ret}(t)$ für $t > T/2$ an. Für $\omega \in \frac{2\pi}{T}\mathbb{N}$ gilt $C_\omega =$? *Lösung:* Mit $\Omega = 2\pi/T$ gilt

$$x_{ret}(t) = -B\frac{T^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(\pi\frac{\omega}{\Omega}\right)}{\pi\frac{\omega}{\Omega}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right)} \cdot \cos(\omega t) \text{ für } t > T/2.$$

3. (Freiwillig) Bestimmen Sie über den Ansatz $y(x) = x^c$ mit $c \in \mathbb{R}$ jenes Fundamentalsystem von

$$y''(x) - \frac{1}{2x}y'(x) + \frac{1}{2x^2}y(x) = 0 \text{ für alle } x > 0 \text{ (Euler DG)}, \tag{2}$$

   dessen Wronskimatrix im Punkt $x = 1$ die Einheitsmatrix ist.